Εὐκλείδεια Γεωμετρία

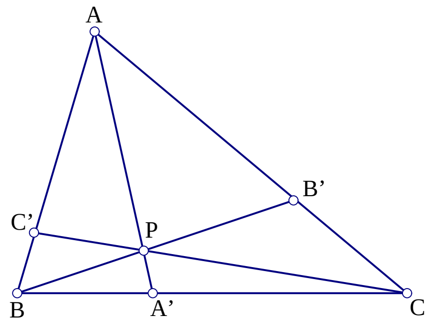
Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 11
Δευτέρα 25-10-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Θεώρημα τοῦ Ceva. *Ἔστω P σημεῖο στὸ ἐσωτερικὸ τριγώνου ABC καὶ A', B', C' οἱ τομὲς τῶν εὐθειῶν PA, PB, PC μὲ τὶς πλευρὲς BC, CA, AB, ἀντιστοίχως (σχῆμα 1). Τότε*



Σχῆμα 1: Θεώρημα τοῦ Ceva – Ὀρθό

ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1\,. \tag{1}$$

Ἀντιστρόφως, ἂν A', B', C' εἶναι σημεῖα ἐπὶ τῶν πλευρῶν (ὄχι τῶν προεκτάσεών τους) BC, CA, AB, ἀντιστοίχως, τοῦ τριγώνου ABC, τέτοια ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ σχέση (1), τότε οἱ εὐθεῖες AA', BB', CC' περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

Ἀπόδειξη. (Γενικά, σὲ ἕνα τρίγωνο XYZ, ὁ συμβολισμὸς (XYZ) σημαίνει τὸ ἐμβαδόν του.)

Τὸ ὀρθό. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα PBA' καὶ PCA' ἔχουν κοινὸ ὕψος, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγο τῶν βάσεών τους. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὰ τρίγωνα ABA' καὶ ACA'. Ἄρα,

$$\frac{(ABA')}{(ACA')} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{(PBA')}{(PCA')}$$

ὁπότε, ἀπὸ ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν,

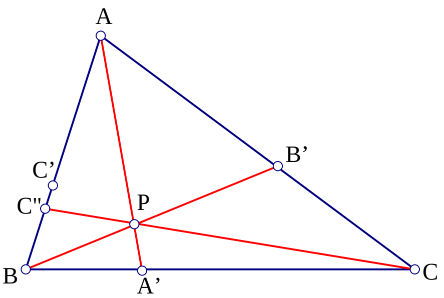
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{(ABA') - (PBA')}{(ACA') - (PCA')} = \frac{(PAB)}{(PAC)}\,. \tag{2}$$

Ἐντελῶς συμμετρικά,

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{(PBC)}{(PAB)} \tag{3}$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{(PAC)}{(PBC)} \tag{4}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατὰ μέλη τὶς (2), (3) καὶ (4), παίρνομε τὴν (1).
Τὸ ἀντίστροφο. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1). Τώρα δουλεύομε μὲ τὸ σχῆμα 2. Ἔστω P τὸ



Σχῆμα 2: Θεώρημα τοῦ Ceva – Ἀντίστροφο

σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν AA' καὶ BB'. Πρέπει ν' ἀποδείξομε ὅτι καὶ ἡ CC' περνᾶ ἀπ' τὸ C. Ἀντ' αὐτοῦ, κάνομε κάτι ἄλλο: Φέρνομε τὴν εὐθεία CP· ἔστω ὅτι αὐτὴ τέμνει τὴν AB στὸ C''· καὶ ἀποδεικνύομε ὅτι τὰ σημεῖα C' καὶ C'' συμπίπτουν. Αὐτὸ γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἀπὸ τὸ ὀρθό, ἐφαρμοζόμενο στὶς εὐθεῖες AA', BB' καὶ CC'', ἔχομε ὅτι

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1\,. \tag{5}$$

Διαιρώντας κατὰ μέλη τὶς (1) καὶ (5) βλέπομε ὅτι

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{C''A}{C''B}\,.$$

Καὶ τὰ δύο σημεῖα C' καὶ C'' ἀνήκουν στὴν πλευρὰ AB (καὶ ὄχι στὴν προέκτασή της), ἄρα, $C'A + C'B = AB = C''A + C''B$. Ἐπιπλέον, ἡ παραπάνω ἀναλογία συνεπάγεται καὶ τὴν ἀναλογία

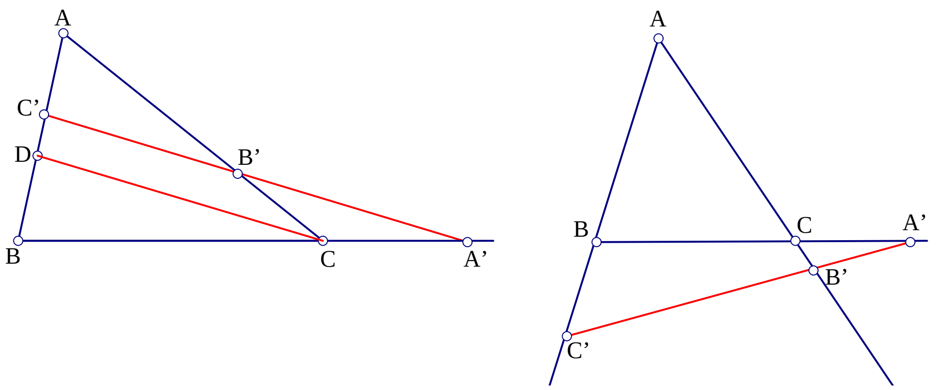
$$\frac{C'A}{C'A + C'B} = \frac{C''A}{C''A + C''B}\,,$$

ἄρα $AC' = AC''$, ἀπ' ὅπου $C' = C''$.

Ἐφαρμογές. (1) Ἂν A', B', C' εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τότε, προφανῶς ἰσχύει ἡ (1), ἄρα, ἀπὸ τὸ ἀντίστροφο τοῦ θεωρήματος τοῦ Ceva, συμπεραίνομε ὅτι οἱ τρεῖς διάμεσοι τοῦ τριγώνου περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο. Πρόταση ἤδη γνωστή, ἀλλὰ ἐδῶ δίνομε μιὰ ἐναλλακτικὴ ἀπόδειξη.
(2) Ἂν A', B', C' εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, τότε (βλ. Μάθημα 5) $A'B = \tau - b = C'B$, $A'C = \tau - c = B'C$, $B'A = \tau - a = C'A$, ἄρα, στὴν περίπτωση αὐτὴ ἰσχύει ἡ (1) καὶ συμπεραίνομε ὅτι οἱ τρεῖς εὐθεῖες ποὺ ἑνώνουν τὶς κορυφὲς ἑνὸς τριγώνου μὲ τὰ ἀπέναντι ἀπὸ αὐτὲς σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (φτιάξτε

ἕνα σχῆμα!) ἔχουν κοινὸ σημεῖο (εἶναι *συντρέχουσες*), τὸ ὁποῖο λέγεται *σημεῖο Gergonne τοῦ τριγώνου*.
(3) Ἂν A', B', C' εἶναι τὰ ἴχνη τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου (φτιάξτε ἕνα σχῆμα!) τότε, ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AA'B$ καὶ $AA'C$ παίρνομε, ἀντιστοίχως $A'B = c\cos B$ καὶ $A'C = b\cos C$. Ἐντελῶς ἀνάλογα, $B'C = a\cos C$, $B'A = c\cos A$ καὶ $C'A = c\cos A$, $C'B = a\cos B$. Ἔχοντας αὐτὲς τὶς σχέσεις, ἐπαληθεύομε πολὺ εὔκολα ὅτι ἰσχύει ἡ (1) στὴν περίπτωση τῶν συγκεκριμένων A', B', C', ἄρα ἔχομε μιὰ ἐναλλακτικὴ ἀπόδειξη τῆς πρότασης ὅτι τὰ τρία ὕψη τριγώνου περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα ἀφορᾶ σὲ εὐθεία ποὺ τέμνει τὶς πλευρὲς τριγώνου ἢ τὶς προεκτάσεις τους. Θεωροῦμε δεδομένο ὅτι, ἂν μία εὐθεία τέμνει τὶς δύο πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου σὲ ἐσωτερικὰ σημεῖα τους καὶ δὲν εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν τρίτη πλευρά, τότε ἡ εὐθεία αὐτὴ τέμνει τὴν *προέκταση* τῆς τρίτης πλευρᾶς. Ἐπίσης, ἂν μιὰ εὐθεία τέμνει τὶς *προεκτάσεις* δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ δὲν εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν τρίτη πλευρά, τότε ἡ εὐθεία αὐτὴ τέμνει τὴν *προέκταση* τῆς τρίτης πλευρᾶς. Δεῖτε στὸ σχῆμα 3 τὶς δύο περιπτώσεις τεμνουσῶν εὐθειῶν (οἱ τέμνουσες τὸ τρίγωνο εὐθεῖες εἶναι κόκκινες). Πρόκειται



Σχῆμα 3: Θεώρημα τοὺ Μενελάου – Ὀρθό

γιὰ προτάσεις ἐποπτικῶς ὁλοφάνερες, ἀλλὰ ὄχι καὶ τόσο εὔκολες στὸ ν' ἀποδειχθοῦν.

Τὸ Θεώρημα τοῦ Μενελάου.*Ἔστω ὅτι εὐθεία τέμνει τὶς πλευρὲς BC, CA, AB ἑνὸς τριγώνου, ἢ τὶς προεκτάσεις τους, σὲ σημεῖα A', B', C', κανένα ἐκ των ὁποίων δὲν συμπίπτει μὲ κάποια κορυφὴ τοῦ τριγώνου. Τότε ἰσχύει ἡ σχέση*

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B} = 1\,. \tag{6}$$

Ἀντιστρόφως, ἂν τὰ σημεῖα A', B', C' βρίσκονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν BC, CA, AB, ἀντιστοίχως, μὲ τὰ δύο ἐξ αὐτῶν στὸ ἐσωτερικὸ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν καὶ τὸ τρίτο στὴν προέκταση τῆς τρίτης πλευρᾶς, ἢ καὶ τὰ τρία στὶς προεκτάσεις τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν καὶ ἰσχύει ἡ σχέση (6), τότε τὰ σημεία αὐτὰ εἶναι συνευθειακά.
Ἀπόδειξη. *Τὸ ὀρθό.* Κάνομε τὴν ἀπόδειξη στὴν περίπτωση ποὺ δύο σημεῖα εἶναι στὸ ἐσωτερικὸ τῶν πλευρῶν (σχῆμα 3, ἀριστερά). Τὴν περίπτωση στὰ δεξιὰ τοῦ σχήματος 3 δεῖτε την ὡς ἄσκηση.
Φέρομε ἀπὸ τὴν κορυφὴ C εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν τέμνουσα καὶ ἔστω D τὸ σημεῖο

τομῆς της μὲ τὴν πλευρὰ AB. Στὸ τρίγωνο $BA'C'$ ἔχομε (Θεώρημα τοῦ Θαλῆ)

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{C'D} \tag{7}$$

καὶ στὸ τρίγωνο ACD ἔχομε

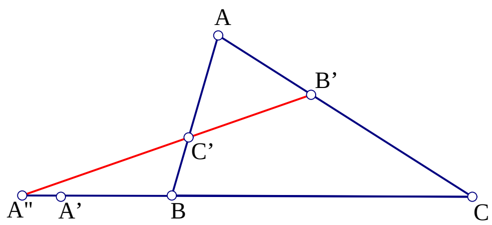
$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{C'D}{C'A}\,. \tag{8}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατὰ μέλη τὶς (7) καὶ (8) παίρνομε

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'B}{C'A}\,,$$

ποὺ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν (6).

Τὸ ἀντίστροφο. Θὰ δουλέψομε μὲ τὸ σχῆμα 4. Θὰ ὑποθέσομε ὅτι τὸ B' εἶναι στὸ



Σχῆμα 4: Θεώρημα τοῦ Μενελάου – Ἀντίστροφο

ἐσωτερικὸ τῆς AC, τὸ C' στὸ ἐσωτερικὸ τὴς AB, ὁπότε, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ A' εἶναι στὴν προέκταση τῆς πλευρᾶς BC. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ $B'C'$ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν BC διότι, σὲ τέτοια περίπτωση θὰ εἴχαμε ὅτι $\frac{B'A}{B'C} = \frac{C'A}{C'B}$. Ἀλλὰ ὑποθέτομε ὅτι ἰσχύει ἡ (6), ὁπότε ὁ συνδυασμὸς αὐτῶν τῶν δύο σχέσεων θὰ μᾶς ἔδινε $\frac{A'B}{A'C} = 1$, κάτι ἀδύνατο, ἀφοῦ τὸ A' εἶναι ἐκτὸς τὴς πλευρᾶς BC.

Ἂς ὑποθέσομε, λοιπόν, ὅτι ἡ εὐθεία $B'C'$ τέμνει τὴν προέκταση τῆς πλευρᾶς BC πρὸς τὸ μέρος τοῦ B, ἔστω σὲ κάποιο σημεῖο A''. Θὰ δείξομε ὅτι τὸ A'' ταυτίζεται μὲ τὸ A'. Σημειῶστε ὅτι, ναὶ μὲν ξέρομε ὅτι τὸ A' εἶναι στὴν προέκταση τοῦ BC, ἀλλὰ δὲν ξέρομε ἀκόμη ἂν εἶναι καὶ αὐτὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ B! Θὰ τὸ ἀποδείξομε καὶ αὐτό.

Ἀφοῦ τὰ σημεῖα A'', B', C' εἶναι συνευθειακά, τὸ ὀρθὸ τοῦ Θεωρήματος τοῦ Μενελάου μᾶς λέει ὅτι

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1\,. \tag{9}$$

Διαιρώντας κατὰ μέλη τὶς (7) καὶ (8) συμπεραίνομε ὅτι

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A''B}{A''C}\,.$$

Ἡ σχέση αὐτή, κατ' ἀρχάς, δείχνει ὅτι καὶ τὸ A' εἶναι πρὸς τὸ μέρος τοῦ B. Διότι, ἀφοῦ τὸ A'' εἶναι πρὸς τὸ μέρος τοῦ B, ὁ δεξιὸς λόγος εἶναι < 1, ἄρα $A'B < A'C$, ποὺ σημαίνει ὅτι, ἀναγκαστικά, τὸ A' εἶναι πρὸς τὸ μέρος τοῦ B. Τώρα, ἡ παραπάνω ἀναλογία συνεπάγεται τὴν

$$\frac{A'B}{A'C - A'B} = \frac{A''B}{A''C - A''B} \quad \text{δηλαδή,} \quad \frac{A'B}{BC} = \frac{A''B}{BC}\,,$$

ἄρα $BA' = BA''$, ποὺ μᾶς ὁδηγεῖς τὸ συμπέρασμα (σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ ὅτι τὰ A', A'' εἶναι πρὸς τὸ ἴδιο μέρος τοῦ B) ὅτι $A' = A''$ καί, συνεπῶς, τὰ A', B', C' εἶναι συνευθειακά.