

# Ευκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινό Έξάμηνο 2010

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

## Μάθημα 12

3-11-2010

Συνοπτική περιγραφή

Λύθηκαν πολύ αναλυτικά οι εξής ασκήσεις.

1. *Αν στο τρίγωνο  $ABC$  η ευθεία του Euler είναι κάθετη στη  $BC$ , τότε  $AB = AC$ .*

Συνοπτική απόδειξη. Έστω  $\epsilon$  η ευθεία του Euler. Αυτή διέρχεται από το κέντρο  $O$  του περιγεγραμμένου κύκλου, από το κέντρο βάρους  $G$  και από το ὀρθόκεντρο  $H$ . Ἄφου  $\epsilon$  διέρχεται διὰ τοῦ  $O$  καὶ εἶναι κάθετος στὸ  $BC$ , ἔπεται ὅτι εἶναι μεσοκάθετος τοῦ  $BC$ . Ἄφου διέρχεται διὰ τοῦ  $H$  καὶ εἶναι κάθετος στὴν πλευρὰ  $BC$ , ἡ  $\epsilon$  εἶναι ὁ φορέας τοῦ διὰ τῆς κορυφῆς  $A$  ὕψους. Ἄρα, τὸ  $A$  βρίσκεται πάνω στὴν  $\epsilon$ , ἡ ὁποία εἶδαμε ὅτι εἶναι καὶ μεσοκάθετος τοῦ  $BC$ . ἄρα,  $AB = AC$ .

2. *Ἐστω τρίγωνο  $ABC$ ,  $\mathcal{C}$  ὁ περιγεγραμμένος κύκλος του καὶ  $H$  τὸ ὀρθόκεντρό του. Ἀποδείξτε ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου  $P$  τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος  $HX$ , καθὼς τὸ  $X$  διατρέχει τὸν κύκλο  $\mathcal{C}$ , εἶναι ὁ κύκλος Euler τοῦ τριγώνου.*

Συνοπτικὴ ἀπόδειξη. Ἐστω  $O$  τὸ κέντρο καὶ  $R$  ἡ ἀκτίνα τοῦ  $\mathcal{C}$ . Ἄν ἐφαρμοστεῖ στὴν περίπτωσή μας ἡ ἀσκηση 3 τῆς 2<sup>ης</sup> ἐνόητας ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ - ΑΠΛΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ, τῆς ὁποίας ἡ λύση συζητήθηκε ἔκτενῶς στὴν 4<sup>η</sup> διάλεξη (29-9-2010), ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι κύκλος ἀκτίνας  $R/2$ , τοῦ ὁποίου τὸ κέντρο τοῦ εἶναι μέσο τοῦ  $HO$ . Ἀλλὰ αὐτό, ἀκριβῶς, τὸ μέσο εἶναι τὸ κέντρο τοῦ κύκλου Euler (βλ.10<sup>η</sup> διάλεξη, 20-10-2010). ἐπιπλέον δέ, ὁ κύκλος Euler ἔχει ἀκτίνα  $R/2$ . Ἄρα, ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος καὶ ὁ κύκλος τοῦ Euler συμπίπτουν.