Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

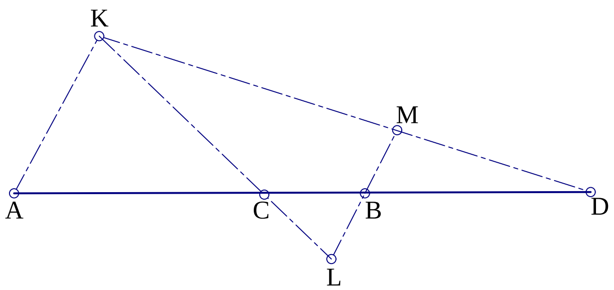
Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 13
15-11-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Λῆμμα. *Δοθέντων δύο (διαφορετικῶν) σημείων A, B καὶ ἑνὸς θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\lambda \neq 1$, ὑπάρχει ἕνα ἀκριβῶς σημεῖο C ἐντὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ ἕνα ἀκριβῶς σημεῖο D ἐπὶ τῆς εὐθείας AB, ἀλλὰ ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB, τέτοια ὥστε $\frac{CA}{CB} = \lambda = \frac{DA}{DB}$.*

Ἀπόδειξη. Στὸ σχῆμα 1 τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AK καὶ LM εἶναι παράλληλα. Ἡ κλίση τους εἶναι αὐθαίρετη. Τὸ B εἶναι μέσο τοῦ KL. Τὰ μήκη τῶν AK καὶ BM ἔχουν ἐπιλεγεῖ ἔτσι ὥστε $KA/MB = \lambda$, ὁπότε καὶ $KA/LB = \lambda$. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα



Σχῆμα 1: Ἁρμονικὴ τετράδα σημείων

$\triangle CKA \sim \triangle CLB$ συμπεραίνομε ὅτι $CA/CB = KA/LB = \lambda$ καὶ ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα $\triangle DAK \sim \triangle DBM$, $DA/DB = KA/MB = \lambda$. Ἄρα, τὰ σημεῖα C καὶ D, ὅπως τὰ κατασκευάσαμε, ἔχουν τὴ ζητούμενη ἰδιότητα. Ἡ μοναδικότητα τῶν C καὶ D προκύπτει ἀπὸ τὶς στοιχειώδεις ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν. Π.χ., ἂν ὑπῆρχε κι ἄλλο σημεῖο C' στὸ AB, διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ C μὲ τὴν ἰδιότητα $C'A/C'B = \lambda = CA/CB$, τότε $\frac{C'A}{C'A+C'B} = \frac{CA}{CA+CB}$. Ἀλλὰ $C'A + C'B = AB = CA + CB$, ὁπότε $C'A = CA$, ἄτοπο, ἀφοῦ τὰ C, C' εἶναι διαφορετικὰ σημεῖα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB.

Ὁρισμός. *Ἡ τετράδα σημείων C, D, A, B, ὅπου $A \neq B$, λέμε ὅτι ἀποτελεῖ ἁρμονικὴ τετράδα ἂν τὰ τέσσερα αὐτὰ σημεῖα εἶναι συνευθειακά, ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα C, D ἀνήκει στὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AB, χωρὶς νὰ συμπίπτει μὲ κάποιο ἄκρο του, οὔτε μὲ τὸ μέσο του, καὶ $CA/CB = DA/DB$. Ἂν ὁ τελευταῖος λόγος εἶναι ἴσος μὲ λ ($\lambda > 0$ καὶ $\lambda \neq 1$), λέμε ὅτι ἡ ἁρμονικὴ τετράδα C, D, A, B ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ.*

Παρατηρήσεις. (1) Ἔστω, γιὰ παράδειγμα, ὅτι τὸ C εἶναι μεταξὺ τῶν A, B. Ἂν $\lambda > 1$

(ὅπως συμβαίνει στὸ σχῆμα 1), τότε τὸ D βρίσκεται ἐξωτερικῶς τοῦ AB, ἀπὸ τὸ μέρος τοῦ B· ἐνῶ βρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ A ἂν $\lambda < 1$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει σημεῖο D ἐπὶ τῆς εὐθείας AB, ἐξωτερικῶς τοῦ AB, τέτοιο ὥστε $DA/DB = 1$, γι' αὐτὸ ἐξαιρέσαμε τὴν τιμὴ $\lambda = 1$.

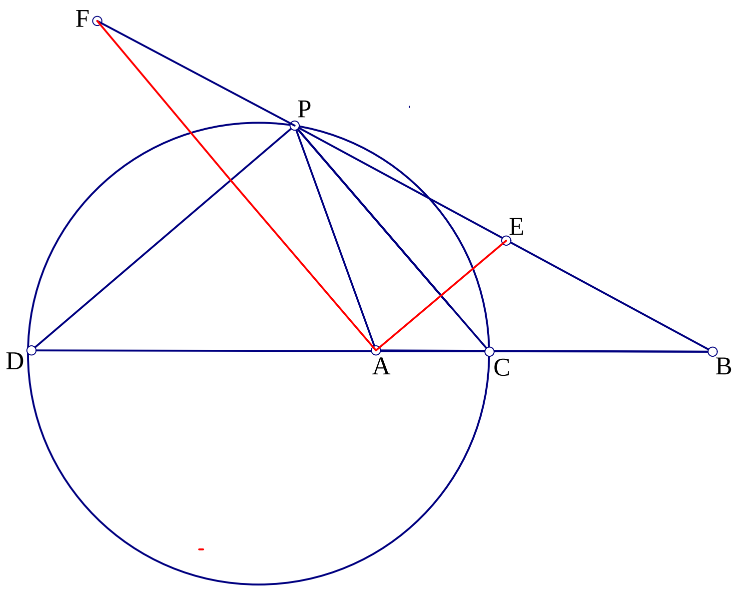
(2) Ἂν C, D, A, B εἶναι ἁρμονικὴ τετράδα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ, τότε καὶ A, B, C, D εἶναι ἁρμονικὴ τετράδα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ.

(3) Ἔστω τρίγωνο ABC, D τὸ σημεῖο τομῆς τῆς διχοτόμου τῆς $\angle A$ μὲ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα BC καὶ D' τὸ σημεῖο τομῆς τῆς *ἐξωτερικῆς* διχοτόμου τῆς $\angle A$ μὲ τὴν προέκταση τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος BC. Ἀπὸ τὰ *Θεωρήματα τῶν διχοτόμων* (ἐδάφιο 7.8 στὸ σχολικὸ βιβλίο) ἔχομε ὅτι $DB/DC = AB/AC = D'B/D'C$, ἄρα ἡ τετράδα D, D', A, B εἶναι ἁρμονική, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο AB/AC. Φυσικά, τὰ ἀνάλογα ἰσχύουν καὶ γιὰ τὶς ἄλλες δύο διχοτόμους τοῦ τριγώνου.

Ἀπολλώνειος κύκλος. *Δίδονται δύο σημεῖα A, B. Ἕνας κύκλος $\mathcal{A}$ λέγεται Ἀπολλώνειος κύκλος ὡς πρὸς τὰ A, B, ἂν ἡ εὐθεία AB τὸν τέμνει σὲ δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα C, D, τέτοια ὥστε ἡ τετράδα C, D, A, B νὰ εἶναι ἁρμονική. Στὴν περίπτωση αὐτή, ἂν ἡ τιμὴ τῶν ἴσων λόγων CA/CB καὶ DA/DB εἶναι λ (> 0 καὶ $\neq 1$), λέμε ὅτι ὁ $\mathcal{A}$ εἶναι ὁ Ἀπολλώνειος κύκλος ὡς πρὸς τὰ A, B, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ.*

Θεώρημα. *Ἔστω $\mathcal{A}$ ὁ Ἀπολλώνειος κύκλος ὡς πρὸς τὰ A, B, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ, ὅπως στὸν παραπάνω ὁρισμό. Τότε, γιὰ κάθε σημεῖο P τοῦ $\mathcal{A}$ ἰσχύει $PA/PB = \lambda$.*

Ἀπόδειξη. Στὸ σχῆμα 2 ὁ κύκλος ἔχει διάμετρο CD καὶ $CA/CB = DA/DB = \lambda$. Τὸ P εἶναι τυχαῖο σημεῖο τοῦ κύκλου καὶ θ' ἀποδείξομε ὅτι $PA/PB = \lambda$. Φέρομε τὴν AE παράλληλη πρὸς τὴν PD καὶ τὴν AF παράλληλη πρὸς τὴν PC.



Σχῆμα 2: Ἀπολλώνειος κύκλος

Τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ γιὰ τὶς παράλληλες AF, CP τεμνόμενες ἀπὸ τὶς BA, BF δίνει $PF/PB = CA/CB = \lambda$. Τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ γιὰ τὶς παράλληλες AE, DP τεμνόμενες ἀπὸ τὶς BD, BP δίνει $PE/PB = DA/DB = \lambda$. Ἄρα, $PF/PB = PE/PB$, ὁπότε, $PF = PE$. Ἀλλὰ $\angle CDP = 90^o$ (ἐγγεγραμμένη, ποὺ βαίνει σὲ ἡμικύκλιο), ὁπότε καὶ $\angle FAE = 90^o$. Ἔτσι, τὸ τρίγωνο AEF εἶναι ὀρθογώνιο στὸ A καὶ ἡ AP εἶναι διαμεσός του, ἀφοῦ δείξαμε ὅτι $PF = PE$. Συνεπῶς, $PA = PE$. Ὅμως, λίγο παραπάνω εἴδαμε ὅτι $PE/PB = \lambda$, ἄρα $PA/PB = \lambda$.

Πόρισμα 1. *Κάθε Ἀπολλώνειος κύκλος ὡς πρὸς τὰ A, B, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο $\lambda < 1$, βρίσκεται ἐξ ὁλοκλήρου στὸ ἡμιεπίπεδο, τὸ ὁποῖο ὁρίζεται ἀπ' τὴ μεσοκάθετο τοῦ AB καὶ περιέχει τὸ σημεῖο A. Ἀνάλογα, κάθε Ἀπολλώνειος κύκλος ὡς πρὸς τὰ A, B, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο $\lambda > 1$, βρίσκεται ἐξ ὁλοκλήρου στὸ ἡμιεπίπεδο, τὸ ὁποῖο ὁρίζεται ἀπ' τὴ μεσοκάθετο τοῦ AB καὶ περιέχει τὸ σημεῖο B.*

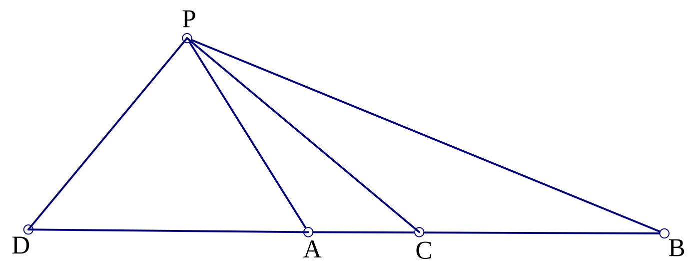
Ἀπόδειξη προφανής.

Πόρισμα 2. *Ἔστω ὅτι λ_1, λ_2 εἶναι διαφορετικοὶ θετικοὶ ἀριθμοί, καὶ οἱ δύο μικρότεροι τοῦ 1 ἢ καὶ οἱ δύο μεγαλύτεροι τοῦ 1. Ἔστω ὅτι $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ εἶναι οἱ Ἀπολλώνειοι κύκλοι ὡς πρὸς τὰ ἴδια σημεῖα A, B, ἀλλὰ μὲ ἀντίστοιχους λόγους λ_1, λ_2. Τότε, ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ἄλλου.*

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τὸ P ἦταν κοινὸ σημεῖο τῶν $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$. Βλέποντας τὸ P ὡς σημεῖο τοῦ πρώτου κύκλου καὶ ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα, συμπεραίνομε ὅτι $PA/PB = \lambda_1$. Βλέποντας τὸ P ὡς σημεῖο τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα, συμπεραίνομε ὅτι $PA/PB = \lambda_2$. Ἄρα, $\lambda_1 = \lambda_2$, ποὺ ἀντιφάσκει μὲ τὴν ὑπόθεσή μας. Ἀφοῦ οἱ κύκλοι δὲν τέμνονται, ἢ ὁ ἕνας βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ἄλλου ἢ ὁ ἕνας εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸν ἄλλο. Ἂν $\lambda_1, \lambda_2 < 1$ (ὅπως, γιὰ παράδειγμα, στὸ σχῆμα 2), τότε τὸ σημεὶο A εἶναι στὸ ἐσωτερικὸ καὶ τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου Ἀπολλώνειου κύκλου, ἄρα ἀποκλείεται ὁ ἕνας κύκλος νὰ εἶναι ἔξω ἀπ' τὸν ἄλλο. Ἂν $\lambda_1, \lambda_2 > 1$, τότε, ἐντελῶς ἀνάλογα, τὸ B εἶναι σημεῖο στὸ ἐσωτερικὸ καὶ τῶν δύο κύκλων, ἄρα, καὶ πάλι, ἀποκλείεται νὰ εἶναι ὁ ἕνας κύκλος ἔξω ἀπ' τὸν ἄλλο. Ἄρα, συμπεραίνομε ὅτι ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ἄλλου.

Σημαντικὸς γεωμετρικὸς τόπος. *Δίδονται δύο σημεῖα A, B καὶ θετικὸς ἀριθμὸς $\lambda \neq 1$. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων P, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα $PA/PB = \lambda$, εἶναι ὁ Ἀπολλώνειος κύκλος ὡς πρὸς τὰ A, B, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ.*

Ἀπόδειξη. Ὀρθό: Στὸ σχῆμα 3 τὸ P ὑποθέτομε ὅτι ἔχει τὴν ἰδιότητα $PA/PB = \lambda$. Σχηματίζομε τὸ τρίγωνο PAB καὶ φέρομε τὴν ἐσωτερικὴ καὶ τὴν ἐξωτερικὴ διχοτόμο τῆς



Σχῆμα 3: Ὁ Ἀπολλώνειος κύκλος ὡς γεωμετρικὸς τόπος

$\angle P$. Ἀπὸ τὰ θεωρήματα τῶν διχοτόμων (ἐδάφιο 7.8 στὸ σχολικὸ βιβλίο), $CA/CB = PA/PB = \lambda$ καὶ $DA/DB = PA/PB = \lambda$. Ἄρα, τὰ C, D, A, B ἀποτελοῦν ἁρμονικὴ τετράδα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ. Ἐπιπλέον, $\angle DPC = 90^o$ (ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ

διχοτόμος τέμνονται καθέτως). Ἄρα τὸ P βρίσκεται στὸν κύκλο διαμέτρου CD, δηλαδή, στὸν Ἀπολλώνειο κύκλο ὡς πρὸς τὰ A, B, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ.
Ἀντιστρόφως, βάσει τοῦ θεωρήματος, παραπάνω, κάθε σημεῖο τοῦ Ἀπολλωνείου κύκλου ὡς πρὸς τὰ A, B, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ λόγο λ, ἔχει τὴν ἰδιότητα, ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰ A καὶ B νὰ εἶναι ἴσος μὲ λ.