Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 16
29-11-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Παρουσιάστηκε, μὲ τὶς σχετικὲς ἀποδείξεις, ἡ ἑξῆς ὕλη (παρακάτω, οἱ ἀναφορὲς εἶναι ἀπὸ τὸ σχολικὸ βιβλίο).

1. Γενίκευση τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος καὶ νόμος τῶν συνημιτόνων· ἐδάφιο 9.4, σελίδες 190-192. Ἡ 2^{η} ἐφαρμογή, σελίδες 192-193, ποὺ ἐκφράζει τὸ ὕψος τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του

$$\upsilon_a = \frac{2}{a}\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}$$

(ἀνάλογα καὶ γιὰ τὶς ἄλλες πλευρές), καὶ ὁ ἐξ αὐτοῦ ἄμεσα συναγόμενος *τύπος τοῦ Ἥρωνα* γιὰ τὸ ἐμβαδὸν $\mathbf{E}$ τριγώνου

$$\mathbf{E} = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}\,.$$

2. Τὰ θεωρήματα τῶν διαμέσων, ἐδάφιο 9.5, σελίδες 194-196, καὶ οἱ βασικοὶ γεωμετρικοὶ τόποι, ποὺ βασίζονται σ’ αὐτὰ τὰ θεωρήματα, ἐδάφιο 9.6, σελίδες 196-198. Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του:

$$\mu_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2}{4} \tag{1}$$

καὶ ἀνάλογα γιὰ τὶς ἄλλες δύο διαμέσους.

3. Θεώρημα Stewart (ἄσκηση 4 (i) ἀπὸ τὶς «Γενικὲς Ἀσκήσεις» τῆς σελίδας 204). *Ἔστω τρίγωνο ABC, μὲ μήκη πλευρῶν $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, καὶ τυχαῖο σημεῖο D ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BC. Τότε ἰσχύει ἡ σχέση*

$$DB\cdot b^2 + DC\cdot c^2 = a\cdot(DA^2 + DB\cdot DC)\,. \tag{2}$$

Μὲ τὴ βοήθεια αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος βρέθηκε ὁ τύπος ὑπολογισμοῦ τῶν διχοτόμων τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του:

$$\delta_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc\tau(\tau-a)}\,,$$

καὶ ἀνάλογα γιὰ τὶς ἄλλες δύο διχοτόμους.

Ἀπόδειξη. Ἔστω AD ἡ διχοτόμος τῆς $\angle A$ (D τὸ πόδι τῆς διχοτόμου στὴν πλευρὰ BC). Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου, $\frac{DB}{DC} = \frac{b}{c}$ καὶ ἀπὸ αὐτὴ τὴν ἀναλογία συνάγομε, μὲ ἁπλὲς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν, ὅτι $DB = \frac{ac}{b+c}$ καὶ $DC = \frac{ab}{b+c}$. Ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα Stewart γιὰ τὸ τρίγωνο ABC καὶ τὸ συγκεκριμένο σημεῖο D, παίρνομε

$$\frac{ac}{b+c} \cdot b^2 + \frac{ab}{b+c} \cdot c^2 = a \left(AD^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \right) .$$

Κάνοντας τὶς πράξεις καὶ λύνοντας ὡς πρὸς AD^2, ὑπολογίζομε:

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{b^2c + bc^2}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{b+c}\left(b + c - \frac{a^2}{b+c} \right) \\ &= \frac{bc}{b+c}\left(\frac{(b+c)^2 - a^2}{b+c} \right) = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 2\tau(2\tau - 2a) = \frac{4}{(b+c)^2} \cdot bc\tau(\tau - a) \qquad (\tau = \frac{a+b+c}{2}) \end{aligned}$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα ($\delta_a = AD$).

4. Ἄλλη ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Stewart, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ $1^{\text{ο}}$ θεώρημα τῆς διαμέσου: Σχέση τοῦ Leibniz. *Ἔστω τρίγωνο ABC, G τὸ κέντρο βάρος του καὶ P τυχαῖο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου. Τότε, ἰσχύει ἡ σχέση.*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3 \cdot PG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)\,, \tag{3}$$

ὅπου, a, b, c εἶναι, ὡς συνήθως, τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξη. (Κάνετε ἐσεῖς τὸ σχῆμα, συμβολίζοντας μὲ M τὸ μέσο τῆς πλευρᾶς BC.) Ἐφαμόζοντας τὸ $1^{\text{ο}}$ θεώρημα τῆς διαμέσου στὸ τρίγωνο PBM, ἔχομε

$$PB^2 + PC^2 = 2 \cdot PM^2 + \frac{a^2}{2} \tag{4}$$

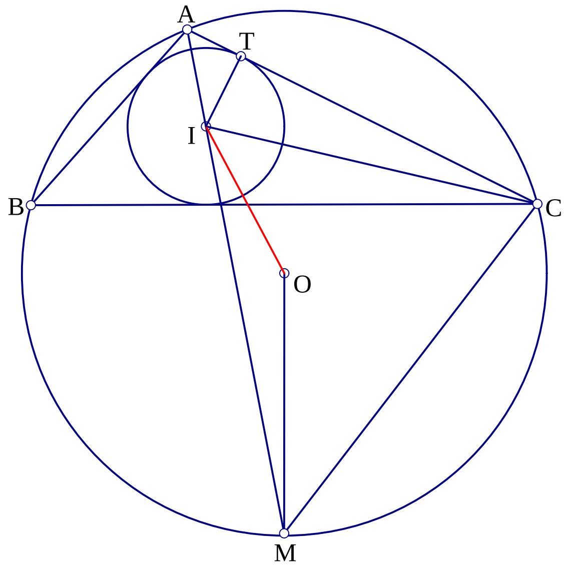
Στὴ συνέχεια ἐφαρμόζομε τὸ θεώρημα Stewart στὸ τρίγωνο PAM. Ἡ πλευρὰ AM εἶναι ἡ διάμεσος μ_a τοῦ τριγώνου ABC, τὴν ὁποία ἔχομε ὑπολογίσει παραπάνω (σχέση (1)). Ἐπίσης, $GM = \mu_a/3$ καὶ $GA = 2\mu_a/3$, ἄρα, ἡ σχέση τοῦ Stewart μᾶς δίνει, διαδοχικά,

$$\begin{aligned} GA \cdot PM^2 + GM \cdot PA^2 &= \mu_a(PG^2 + GA \cdot GM) \\ \frac{2}{3}\mu_a \cdot PM^2 + \frac{1}{3}\mu_a PA^2 &= \mu_a(PG^2 + \frac{2}{9}\mu_a^2) \\ 2 \cdot PM^2 + PA^2 &= 3 \cdot PG^2 + \frac{2}{3}\mu_a^2 \\ (PB^2 + PC^2 - \frac{a^2}{2}) + PA^2 &= 3 \cdot PG^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \quad \text{(λόγῳ τῶν (4) καὶ (1))} \end{aligned}$$

ἄρα, ἀπομονώνοντας τὸ $PA^2 + PB^2 + PC^2$ στὸ ἀριστερὸ μέλος, καταλήγομε στὴν (3).

5. Διάκεντρος ἐγγεγραμμένου – περιγεγραμμένου κύκλου. Σχέση Euler. *Ἔστω ABC τρίγωνο, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος του κέντρου O καὶ ἀκτίνας R καὶ ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος του κέντρου I καὶ ἀκτίνας r (σχῆμα 1). Τότε, ἰσχύει ἡ σχέση*

$$IO^2 = R^2 - 2Rr\,. \tag{5}$$



Σχῆμα 1: Σχέση Euler

Ἀπόδειξη. Παρατηρῆστε ὅτι, ἀφοῦ ἡ AI εἶναι διχοτόμος τῆς $\angle A$, ἡ προέκτασή της τέμνει τὸ τόξο, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ χορδὴ BC στὸ μέσο του M.
Μία ἄλλη σημαντικὴ παρατήρηση εἶναι ὅτι $MI = MC$. Ἀρκεῖ νὰ δείξομε ὅτι $\angle CIM = \angle ICM$. Ἡ ἀπόδειξη αὐτῆς τῆς ἰσότητας εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\angle ICM = \angle ICB + \angle BCM = \frac{1}{2}\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{A}$$

(παρατηρῆστε ὅτι οἱ γωνίες $\angle BCM$ καὶ $\angle BAM$ (ποὺ εἶναι ἡ μισὴ τῆς $\angle A$) εἶναι ἐγγεγραμμένες καὶ βαίνουν στὸ ἴδιο τόξο). Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\angle IMC$ βαίνει στὸ ἴδιο τόξο μὲ τὴν $\angle B$, ἄρα ἔχει τὸ ἴδιο μέτρο. Συνεπῶς,

$$\angle CIM = 180^{\mathrm{o}} - \angle ICM - \angle IMC = 180^{\mathrm{o}} - \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} - \hat{B} = \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} = \angle ICM$$

Οἱ δύο διαφορετικὲς ἐκφράσεις τὴς δύναμης τοῦ σημείου I ὡς πρὸς τὸν περιγεγραμμένο κύκλο (δεῖτε τὸ 9^{o} μάθημα) μᾶς δίνουν τὴ σχέση $IA \cdot IM = R^2 - IO^2$, ἀπὸ τὴν ὁποία παίρνομε

$$IO^2 = R^2 - IA \cdot IM = R^2 - IA \cdot CM\,. \tag{6}$$

Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων ($5^{\text{ο}}$ μάθημα), ἐφαρμοσμένο στὸ τρίγωνο MAC, ἔχομε

$$CM = 2R \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} \, ,$$

ἐνῶ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο TAI ἔχομε ὅτι $\sin \frac{\hat{A}}{2} = IT/IA$, ἄρα ($IT = r$),

$$IA = \frac{r}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} \, .$$

Ἀντικαθιστώντας τὶς παραπάνω τιμὲς τῶν MC καὶ IA στὴν (6), παίρνομε τὴν ἀποδεικτέα.