Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 18
6-12-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Συζητήθηκαν οἱ βασικὲς γεωμετρικὲς κατασκευές, τὶς ὁποῖες μπορεῖ κανεὶς νὰ κάνει **μόνο μὲ χρήση κανόνα καὶ διαβήτη** (ὁ χάρακας δὲν εἶναι σημαδεμένος μὲ ἀριθμούς, δὲν εἶναι ὑποδεκάμετρο!) μὲ τὴ βοήθεια τῶν μετρικῶν σχέσεων καὶ τῶν ἀναλογιῶν.

> Πάντα, στὴν Εὐκλείδεια Γεωμετρία, ὅταν μιλοῦμε γιὰ «κατασκευή», ἐννοοῦμε «κατασκευὴ μὲ τὴ βοήθεια μόνο τοῦ κανόνα καὶ τοῦ διαβήτη.

Βασικὲς γεωμετρικὲς κατασκευές: Δοθέντων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων a, b, c, νὰ κατασκευασθοῦν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{ab}$, ab/c καὶ a^2/c. Γιὰ τὶς τρεῖς πρῶτες κατασκευές, βλ. σχολικὸ βιβλίο, *Πρόβλημα 1* καὶ *Πρόβλημα 2*, σελ. 187. Γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ ab/c, τῆς ὁποίας πόρισμα εἶναι ἡ κατασκευὴ τοῦ a^2/c, βλ. σχολικὸ βιβλίο, *Πρόβλημα 1*, σελ. 154.
Τονίσθηκε ὅτι, σ' αὐτὲς τὶς κατασκευές, τὰ a, b, c **δὲν εἶναι ἀριθμοί, ἀλλὰ δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα (γεωμετρικὰ ἀντικείμενα)**. Τονίσθηκε, ἐπίσης, ὅτι, στὰ κλασικὰ (ἀρχαῖα) Μαθηματικά, οἱ κατασκευὲς αὐτὲς εἶχαν καθαρὰ γεωμετρικὸ νόημα, ὡς ἑξῆς:

- $x=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow x^2=a^2+b^2$: Ἂν δοθοῦν δύο τετράγωνα μὲ ἀκμὲς a καὶ b, νὰ κατασκευασθεῖ τετράγωνο (ἡ ἀκμή του ἔστω x), μὲ ἐμβαδὸν ἴσο πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο δοθέντων τετραγώνων.
- $x=\sqrt{a^2-b^2} \Leftrightarrow x^2=a^2-b^2$: Ἂν δοθοῦν δύο τετράγωνα μὲ ἀκμὲς a καὶ b ($a>b$), νὰ κατασκευασθεῖ τετράγωνο (ἡ ἀκμή του ἔστω x), μὲ ἐμβαδὸν ἴσο πρὸς τὴ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο δοθέντων τετραγώνων.
- $x=\sqrt{ab} \Leftrightarrow x^2=ab$: Δοθέντος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ πλευρὲς a, b, νὰ κατασκευασθεῖ τετράγωνο (ἡ ἀκμή του ἔστω x) ἰσοδύναμο (δηλαδή, ἴσου ἐμβαδοῦ) μὲ τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμο.

Ἄλλη βασικὴ γεωμετρικὴ κατασκευή: Δοθέντος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος a καὶ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ n, νὰ κατασκευασθεῖ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $a\sqrt{n}\cdot$ βλ. σχολικὸ βιβλίο, *Πρόβλημα 3*, σελ. 188. Ἡ γεωμετρικὴ διατύπωση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος, κατ' ἀναλογίαν μὲ τὰ παραπάνω, εἶναι, νὰ κατασκευασθεῖ τετράγωνο μὲ ἐμβαδὸν n-πλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ δοθέντος τετραγώνου.

Ἂν δοθεῖ τὸ μοναδιαῖο μῆκος –ὅπως στὴν περίπτωση τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας–, καὶ ὁποιοσδήποτε θετικὸς ρητὸς ἀριθμὸς q, μπορεῖ κανεὶς νὰ κατασκευάσει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους q. Ἀκόμη περισσότερο· ἂν δοθεῖ φυσικὸς ἀριθμὸς n, μπορεῖ νὰ κατασκευασθεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους $\sqrt{n}$.

Τὰ ἄλυτα γεωμετρικὰ προβλήματα τῆς Ἀρχαιότητας.

- **Διπλασιασμὸς τοῦ κύβου.** *Δοθέντος κύβου, νὰ κατασκευασθεῖ ἄλλος κύβος μὲ ὄγκο διπλάσιο ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ δοθέντος.* Ἂν ὁ δοθεὶς κύβος ἔχει ἀκμὴ a καὶ ὁ ζητούμενος ἀκμὴ x, πρέπει νὰ ἰσχύει $x^3 = 2a^3$, ἄρα πρέπει νὰ κατασκευασθεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους $x = a\sqrt[3]{2}$. Ἂν, δίχως βλάβη τῆς γενικότητας, φαντασθοῦμε τὸ a ὡς μοναδιαῖο μῆκος, πρέπει νὰ κατασκευασθεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους $\sqrt[3]{2}$. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $X^3 - 2$, τὸ ὁποῖο δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενο πολυωνύμων μικροτέρου βαθμοῦ *μὲ ἀκέραιους συντελεστές*. Ἀποδεικνύεται ὅτι, γενικά, *ἂν ρ εἶναι ρίζα ἑνὸς πολυωνύμου τρίτου βαθμοῦ μὲ ἀκέραιους συντελεστές, τὸ ὁποῖο δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενο πολυωνύμων μικροτέρου βαθμοῦ μὲ ἀκέραιους συντελεστές, τότε εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευασθεῖ μῆκος ἴσο μὲ ρ.*
  Ἡ ἀπόδειξη αὐτῆς τῆς πρότασης γίνεται στὸ μάθημα τῆς *Θεωρίας Σωμάτων*.

- **Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου**. *Δοθέντος κύκλου, νὰ κατασκευασθεῖ τετράγωνο ἰσοδύναμο (ἴσου ἐμβαδοῦ) μὲ τὸν δοθέντα κύκλο.* Ἂν ὁ δοθεὶς κύκλος ἔχει ἀκτίνα r καὶ τὸ ζητούμενο τετράγωνο ἔχει ἀκμὴ x, πρέπει νὰ ἰσχύει $x^2 = \pi r^2$, ἄρα πρέπει νὰ κατασκευασθεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους $x = \sqrt{\pi}r$. Ἂν, δίχως βλάβη τῆς γενικότητας, φαντασθοῦμε τὸ r ὡς μοναδιαῖο μῆκος, πρέπει νὰ κατασκευασθεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους $\sqrt{\pi}$. Στὴ *Θεωρία Σωμάτων* ἀποδεικνύεται ὅτι, *γιὰ νὰ μπορεῖ νὰ κατασκευαστεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους ℓ, ὅπου ℓ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, πρέπει ὁ ℓ νὰ εἶναι ρίζα μὴ μηδενικοῦ πολυωνύμου μὲ ἀκέραιους συντελεστές.*[1] Ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς π δὲν εἶναι ρίζα ἑνὸς τέτοιου πολυωνύμου, καθὼς ἀποδείχθηκε στὰ 1882 ἀπὸ τὸν Lindemann, ἄρα τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸν $\sqrt{\pi}$, ὁπότε, εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους $\sqrt{\pi}$ εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευασθεῖ, ποὺ σημαίνει ὅτι ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου εἶναι ἀδύνατος.

- **Τριχοτόμηση γωνίας**. *Δὲν ὑπάρχει γεωμετρικὴ μέθοδος, ἡ ὁποία, μὲ τὴ βοήθεια τοῦ κανόνα καὶ τοῦ διαβήτη νὰ διαιρεῖ σὲ τρεῖς ἴσες γωνίες μιὰ ὁποιαδήποτε δεδομένη γωνία.* Ἂν αὐτὸ συνέβαινε, θὰ μπορούσαμε νὰ τριχοτομήσομε τὴ γωνία 60^{o}, ἄρα θὰ μπορούσαμε νὰ κατασκευάσομε γωνία 20^{o}. Ὅμως, ἂν φαντασθοῦμε τὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο, βλέπομε ὅτι ἡ κατασκευὴ μιᾶς γωνίας ἀνάγεται στὴν κατασκευὴ τοῦ συνημιτόνου της. Συνεπῶς, ἂν μπορούσαμε νὰ κατασκευάσομε γωνία 20^{o}, θὰ μπρούσαμε νὰ κατασκευάσομε (στὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο, πάνω στὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων), εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους $\alpha = \cos 20^{\mathrm{o}}$, ἄρα καὶ εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 2α. Ὅμως, ἀπὸ τὸν γενικὸ τύπο $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ἔπεται (γιὰ $\theta = 20^{\mathrm{o}}$) ὅτι $\frac{1}{2} = \cos 60^{\mathrm{o}} = 4\cos^3 20^{\mathrm{o}} - 3\cos 20^{\mathrm{o}} = 4\alpha^3 - 3\alpha$, ὁπότε $(2\alpha)^3 - 3(2\alpha) - 1 = 0$. Μ' ἄλλα λόγια, ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς 2α εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $X^3 - 3X - 1$. Δὲν εἶναι δύσκολο νὰ διαπιστώσει κανεὶς ὅτι αὐτὸ τὸ πολυώνυμο δὲν ἀναλύεται σὲ γινόμενο πολυωνύμων μικροτέρου βαθμοῦ μὲ ἀκέραιους συντελεστές, ὁπότε, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸ πρόβλημα τοὺ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευάσομε εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους ἴσου μὲ τὴ ρίζα 2α τοῦ κυβικοῦ αὐτοῦ πολυωνύμου. Ἄρα, καὶ τὸ πρόβλημα τῆς τριχοτόμησης γωνίας εἶναι ἀδύνατο.

[1] Ἡ συνθήκη αὐτὴ εἶναι ἀναγκαία –*πρέπει*–, ἀλλὰ ὄχι ἱκανή: Ὅπως εἴδαμε στὸ πρόβλημα διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[3]{2}$, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $X^3 - 2$, δὲν εἶναι μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος, ποὺ μποροῦμε νὰ τὸ κατασκευάσομε.