Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

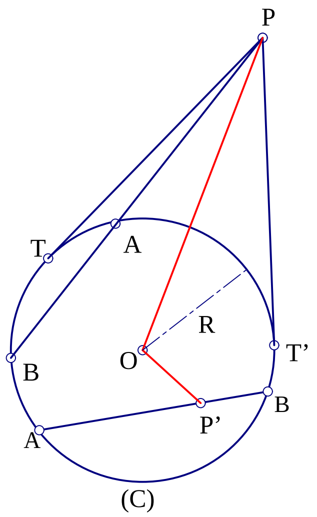
Μάθημα 20
13-12-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Στὸ 9ο μάθημα μιλήσαμε γιὰ τὴ *δύναμη σημείου ὡς πρὸς κύκλο.* Εἶναι χρήσιμο νὰ τὴν ὁρίσομε 'προσημασμένη', δηλαδή, θετική, ἂν τὸ σημεῖο εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἢ πάνω σ' αὐτόν, καὶ ἀρνητική, ἂν τὸ σημεῖο εἶναι στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου. Τὴν (προσημασμένη) δύναμη τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὸν κύκλο (C) συμβολίζομε $\mathcal{D}_P^{(C)}$. Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος (C) ἔχει κέντρο O καὶ ἀκτίνα R. Σύμφωνα καὶ μὲ ὅ,τι εἴπαμε στὸ 9ο μάθημα,

$$\mathcal{D}_P^{(C)} = \begin{cases} PA \cdot PB = PT^2 = PT'^2 = PO^2 - R^2 \\ -P'A \cdot P'B = P'O^2 - R^2 \end{cases}$$

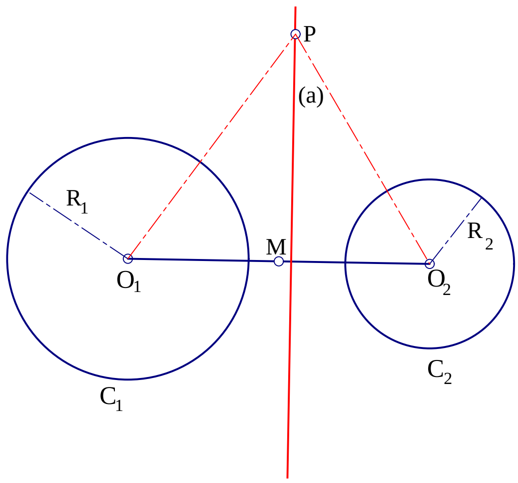
(βλ. σχῆμα 1, ὅπου οἱ PT καὶ PT' εἶναι ἐφαπτόμενες) Δεῖτε καὶ ἐδάφιο 9.7, σελίδες 199-205



Σχῆμα 1: (Προσημασμένη) Δύναμη σημείου ὡς πρὸς κύκλο

τοῦ σχολικοῦ βιβλίου.

Ἀσχοληθήκαμε μὲ τὸν *ριζικὸ ἄξονα* δύο κύκλων: Εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων P, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσες δυνάμεις ὡς πρὸς δύο δοθέντες κύκλους. Στὸ σχῆμα 2, ζητοῦμε τὸν γεωμετρικὸ τόπο τῶν σημείων P, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα $\mathcal{D}_P^{(C_1)} = \mathcal{D}_P^{(C_2)}$. Ἀλλὰ αὐτὴ



Σχῆμα 2: Ριζικὸς ἄξονας

ἡ σχέση ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$, ἄρα, μὲ τὴν $PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$. Τὸ δεξιὸ μέλος εἶναι σταθερὴ ποσότητα, ἄρα, σύμφωνα μὲ τὸ 17º μάθημα, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ P εἶναι μία εὐθεία (a), κάθετη στὴν O_1O_2, ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσο M τοῦ O_1O_2 ἀπόσταση ἴση μὲ $\dfrac{|PO_1^2 - PO_2^2|}{2 \cdot O_1O_2}$.

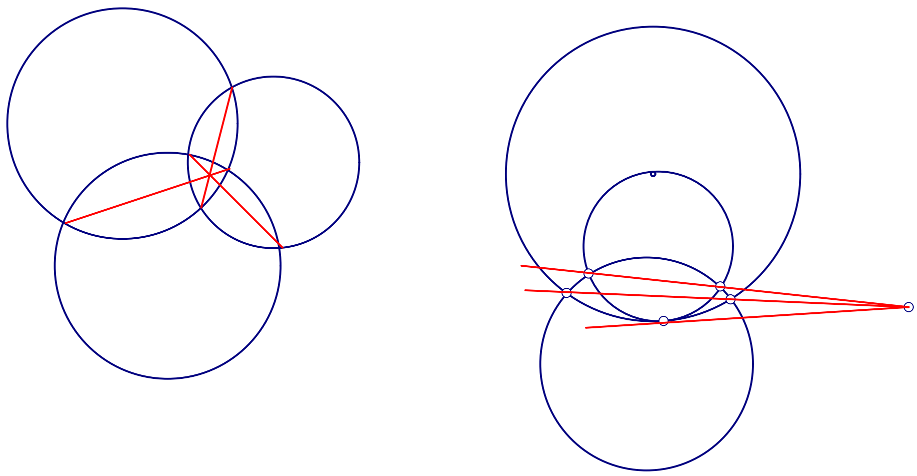
Προφανῶς, ὁ ἴδιος συλλογισμός ἐφαρμόζεται, ἄρα καὶ τὸ ἴδιο συμπέρασμα ἰσχύει, ὁποιαδήποτε σχετικὴ θέση κι ἂν ἔχουν οἱ δύο κύκλοι, ἀρκεῖ τὰ κέντρα τους νὰ εἶναι διαφορετικά. Στὴν περίπτωση, ὅμως, ποὺ οἱ κύκλοι τέμνονται ἢ ἐφάπτονται (ἐσωτερικὰ ἢ ἐξωτερικά), ὁ ριζικὸς ἄξονας σχεδιάζεται ἁπλούστατα: Εἶναι ἡ κοινὴ χορδή, ἢ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη, ἀντιστοίχως, τῶν δύο κύκλων. Πράγματι, ἔστω AB ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων (C_1) καὶ (C_2) (κάνετε ἐσεῖς τὸ σχῆμα) καὶ ἔστω P σημεῖο τῆς εὐθείας AB. Ἂν τὸ P εἶναι μεταξὺ τῶν A καὶ B, τότε, 'ξεχνώντας' τὸν κύκλο (C_2), βλέπομε ὅτι $\mathcal{D}_P^{(C_1)} = -PA \cdot PB$ καί, μετά, 'ξεχνώντας' τὸν κύκλο (C_1), βλέπομε ὅτι $\mathcal{D}_P^{(C_2)} = -PA \cdot PB$, ἄρα, $\mathcal{D}_P^{(C_1)} = \mathcal{D}_P^{(C_2)}$ καὶ ἐντελῶς ἀνάλογα ἂν τὸ P εἶναι πάνω στὴν εὐθεία AB ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB. Ἄρα, κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας AB εἶναι σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἄξονα τὼν δύο κύκλων καί, συνεπῶς, αὐτὸς ὁ ριζικὸς ἄξονας συμπίπτει μὲ τὴν κοινὴ χορδή.

Ἂν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται, ἔστω στὸ σημεῖο T, καὶ (α) εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τους, τότε, ἂς θεωρήσομε ἕνα τυχαῖο σημεῖο P τῆς (α). 'Ξεχνώντας' τὸν κύκλο (C_2), βλέπομε ὅτι $\mathcal{D}_P^{(C_1)} = PT^2$ καί, μετά, 'ξεχνώντας' τὸν κύκλο (C_1), βλέπομε ὅτι $\mathcal{D}_P^{(C_2)} = PT^2$, ἄρα, $\mathcal{D}_P^{(C_1)} = \mathcal{D}_P^{(C_2)}$. Αὐτὸ δείχνει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης (α) τῶν δύο κύκλων ἀνήκουν στὸν ριζικὸ ἄξονα τῶν κύκλων αὐτῶν, ἄρα, ὁ ριζικὸς ἄξονας συμπίπτει μὲ τὴν κοινὴ ἐφαπτομένη.

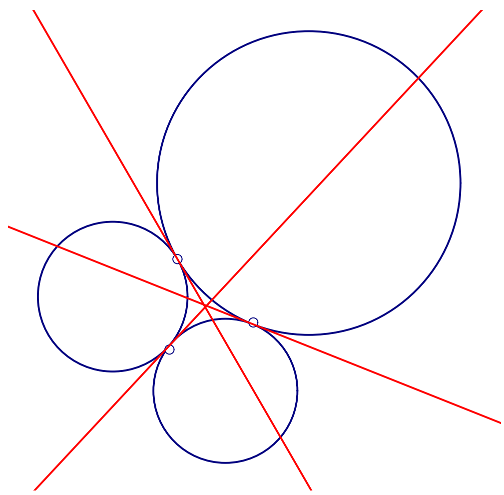
Ριζικὸ κέντρο τριῶν κύκλων. Ἔστω ὅτι τὰ κέντρα τῶν κύκλων (C_1), (C_2), (C_3) δὲν εἶναι συνευθειακά. Συμβολίζομε τὸν ριζικὸ ἄξονα τῶν κύκλων (C_i), (C_j) $(i, j \in \{1, 2, 3\},\ i < j)$ μὲ α_{ij}. Ἔστω K τὸ σημεῖο τομῆς τῶν (α_{12}) καὶ (α_{13}). Τότε, ἀφοῦ τὸ T ἀνήκει στὸν ριζικὸ ἄξονα (α_{12}), ἕπεται ὅτι $\mathcal{D}_T^{(C_1)} = \mathcal{D}_T^{(C_2)}$ καὶ ἀφοῦ τὸ T ἀνήκει στὸν ριζικὸ ἄξονα (α_{13}), ἕπεται ὅτι $\mathcal{D}_T^{(C_1)} = \mathcal{D}_T^{(C_3)}$. Ἄρα, $\mathcal{D}_T^{(C_2)} = \mathcal{D}_T^{(C_3)}$, ποὺ συνεπάγεται ὅτι τὸ T ἀνήκει στὸν ριζικὸ ἄξονα (α_{23}). Συμπέρασμα:

Ἂν τὰ κέντρα τριῶν κύκλων δὲν εἶναι συνευθειακά, τότε οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες, τοὺς ὁποίους οἱ τρεῖς αὐτοὶ κύκλοι ὁρίζουν ἀνὰ δύο, συντρέχουν (διέρχονται ἀπὸ κοινὸ σημεῖο). Τὸ κοινὸ σημεῖο τους λέγεται ριζικὸ κέντρο τῶν τριῶν κύκλων.

Ἄμεση συνέπεια τῆς παραπάνω πρότασης εἶναι ὅτι, σὲ κάθε περίπτωση τῶν σχημάτων 3 καὶ 4 οἱ 'κόκκινες εὐθεῖες' εἶναι συντρέχουσες. Ἡ ἐξήγηση εἶναι ἁπλῆ: Σὲ κάθε περίπτωση, οἱ τρεῖς 'κόκκινες' εὐθεῖες εἶναι οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν τριῶν κύκλων, ἀνὰ δύο θεωρουμένων.



Σχῆμα 3: Δύο εἰδικὲς περιπτώσεις ριζικοῦ κέντρου



Σχῆμα 4: Τρίτη εἰδικὴ περίπτωση ριζικοῦ κέντρου