Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 22

10-1-2011

Συνοπτικὴ περιγραφή

Λύθηκαν λεπτομερῶς οἱ ἑξῆς ἀσκήσεις ἀπὸ τὸ σχολικὸ βιβλίο (αὐτούσιες ἢ μὲ μικρὲς παραλλαγές).

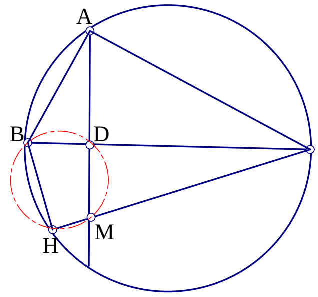
1. *Ἔστω τρίγωνο ABC, M τὸ μέσο τῆς BC καὶ O τὸ μέσο τῆς διαμέσου AM. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $AC^2 - AB^2 = 2(OC^2 - OB^2)$.*
   Ἡ ἀπόδειξη ἔγινε μὲ χρήση τοῦ Β′ Θεωρήματς τῆς Διαμέσου στὰ τρίγωνα ABC καὶ OBC.

2. *Ἔστω ρόμβος $ABCD$ πλευρᾶς a καὶ σημεῖο M τέτοιο ὥστε $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 18a^2$. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ OM συναρτήσει τοῦ a.*
   Ἐφαρμόσαμε τὸ Α′ Θεώρημα τῆς Διαμέσου στὰ τρίγωνα MAC καὶ MBD, προκειμένου νὰ ὑπολογίσομε τὰ $MA^2 + MC^2$ καὶ $MB^2 + MD^2$, ἀντιστοίχως. Ἐπίσης, χρειάστηκε νὰ ὑπολογίσομε τὸ $AC^2 + BD^2 = 2(OA^2 + OD^2) = 2a^2$. Ὕστερα προσθέσαμε κατά μέλη τὶς ἐκφράσεις τῶν $MA^2 + MC^2$ καὶ $MB^2 + MD^2$ καὶ καταλήξαμε στὴ σχέση $18a^2 = 4 \cdot MO^2 + 2a^2$, ἀπ' τὴν ὁποία πήραμε τὴν $OM = 2a$.

   Μιὰ παραλλαγὴ αὐτῆς τῆς ἀσκήσεως: *Ἔστω ρόμβος $ABCD$ πλευρᾶς a. Νὰ βρεθεῖ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων M, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 18a^2$.*
   Σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω ἄσκηση, κάθε σημεῖο M, γιὰ τὸ ὁποῖο ἱκανοποιεῖται ἡ παραπάνω σχέση, ἀνήκει σὲ κύκλο κέντρου O καὶ ἀκτίνας $2a$. Ἀποδείξαμε καὶ τὸ ἀντίστροφο: Κάθε σημεῖο M, ποὺ βρίσκεται στὸν κύκλο κέντρου O καὶ ἀκτίνας $2a$ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 18a^2$, ἄρα, ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ὁ κύκλος κέντρου O καὶ ἀκτίνας $2a$.

3. *Ἔστω ρόμβος $ABCD$ πλευρᾶς a, τέτοιος ὥστε $BD = a$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ ὁποιοδήποτε σημεῖο P ἰσχύει ὅτι $PA^2 - PB^2 + PC^2 - PD^2 = a^2$.*
   (Κάνετε σχῆμα.) Ἐφαρμόσαμε τὸ Α′ Θεώρημα τῆς Διαμέσου στὰ τρίγωνα PAC καὶ PBD, προκειμένου νὰ ὑπολογίσομε τὰ $PA^2 + PC^2$ καὶ $PB^2 + PD^2$, ἀντιστοίχως. Παρατηρήσαμε ὅτι, στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο OCD, εἶναι $OD^2 = a^2$ (ἐξ ὑποθέσεως), ὁπότε $OC^2 = CD^2 - OD^2 = 3a^2/4$ καὶ τώρα εἶναι ἁπλό νὰ δοῦμε ὅτι $PA^2 + PC^2 - (PB^2 + PD^2) = a^2$.

4. *Ἔστω τρίγωνο ABC ὀρθογώνιο στὸ A καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος του. Φέρομε τὸ ὕψος AD καὶ τυχαία εὐθεία ἀπὸ τὸ C, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεία AD στὸ M καὶ τὸν κύκλο στὸ H. Ἀποδεῖξτε ὅτι $CM \cdot CH = CA^2$.*

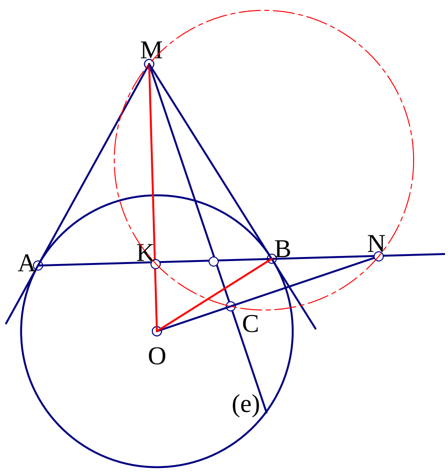


Σχῆμα 1: Ἄσκηση 4

Παρατηρήσαμε ὅτι τὸ τετράπλευρο $BDMH$ εἶναι ἐγγράψιμο καὶ ἐκφράσαμε τὴ δύναμη τοῦ σημείου C ὡς πρὸς τὸν κύκλο, ποὺ περιγράφεται γύρω ἀπὸ τὸ τετράπλευρο αὐτό. Ὁπότε, $CM \cdot CH = CD \cdot CB$. Ἀπὸ γνωστὴ πρόταση (ὑπάρχει καὶ στὸ σχολικὸ βιβλίο πρὶν ἀπὸ τὸ Πυθαγόρειο Θεώρημα), τὸ τελευταῖο γινόμενο ἰσοῦται μὲ AC^2.

5. *Ἔστω τρίγωνο ABC καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος του. Φέρομε τὴ διάμεσο AM καὶ ἔστω ὅτι αὐτὴ τέμνει τὸν περιγεγραμμένο κύκλο στὸ E. Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι $AB^2 + AC^2 = 2 \cdot AM \cdot AE$.*
(Κάνετε τὸ σχῆμα.) Ἀπὸ τὸ Α΄ Θεώρημα τῆς Διαμέσου, $AB^2 + AC^2 = 2 \cdot AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$. Ἀπὸ τὴ δύναμη τοῦ σημείου M ὡς πρὸς τὸν περιγεγραμμένο κύκλο, ἔχομε $MA \cdot ME = MB \cdot MC = MB^2$. Ἄρα, $AM \cdot AE = AM \cdot (AM + ME) = AM^2 + MA \cdot ME = \ldots$.

6. *Ἔστω κύκλος κέντρου O καὶ ἀκτίνας R, σημεῖο M ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ εὐθεία e διερχόμενη διὰ τοῦ M. Ἀπὸ τὸ M φέρομε τὶς ἐφαπτόμενες MA καὶ MB τοῦ κύκλου, καθὼς καὶ τὴν εὐθεία AB. Τέλος, ἔστω C ἡ προβολὴ τοῦ O πάνω στὴν εὐθεία e καὶ N τὸ σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν AB καὶ OC. Ἀποδεῖξτε ὅτι $OC \cdot ON = R^2$.*



Σχῆμα 2: Ἄσκηση 6

Τὸ τετράπλευρο $MKCN$ εἶναι ἐγγράψιμο, ἀφοῦ ἡ MN φαίνεται ἀπὸ τὰ K καὶ C ὑπὸ ἴσες (ὀρθὲς) γωνίες. Φανταζόμαστε, λοιπόν, τὸν κύκλο περὶ τὸ τετράπλευρο αὐτὸ καὶ ἀπὸ τὴ δύναμη τοῦ σημείου O ὡς πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλο ἔχομε, $OC \cdot ON = OK \cdot OM$. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο BOM, ὅμως, ἔχομε ὅτι $OK \cdot OM = OB^2 = R^2$.