Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 5

Δευτέρα 4-10-2010

Συνοπτικὴ περιγραφὴ

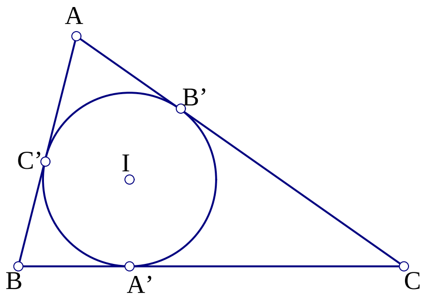
Συζητήθηκε τὸ ἀντίστροφο τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῆς ἀσκήσεως 3 τοῦ φυλλαδίου Ασκησεις επι των Βασικων Γνωσεων - Απλοι Γεωμετρικοι Τοποι.

Ἀπὸ τὶς Ασκησεις επι των Βασικων Γνωσεων - Κυκλος συζητήθηκαν ἐκτενῶς οἱ 1,2,3 καὶ 4. Γιὰ τὴν προσωπικὴ σας μελέτη συνιστῶνται οἱ ἀσκήσεις 5 και 6 τοῦ ἴδιου φυλλαδίου ἀσκήσεων. Ἡ ἄσκηση 7 εἶναι μιὰ πρόκληση γιὰ καλοὺς λῦτες (δὲν εἶναι, ὅμως, πολὺ δύσκολη).

Ἀποδείχθηκαν οἱ ἐνδιαφέροντες καὶ πολὺ χρήσιμοι παρακάτω τῦποι, ποὺ συνδέουν τὴν Εὐκλείδεια Γεωμετρία μὲ τὴ στοιχειώδη Τριγωνομετρία.

Ἔστω τρίγωνο ABC. Ὡς συνήθως, συμβολίζομε μὲ a, b, c τὶς πλευρὲς BC, CA, AB, ἀντιστοίχως· μὲ τ τὴν ἡμιπερίμετρο $(a+b+c)/2$· μὲ R τὴν ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμέου περὶ τὸ $\triangle ABC$ κύκλου (τὸ κέντρο του τὸ συμβολίζομε μὲ O)· μὲ ρ τὴν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου στὸ $\triangle ABC$ κύκλου (τὸ κέντρο του τὸ συμβολίζομε μὲ I). Τέλος, μὲ $\mathbb{E}$ συμβολίζομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $\triangle ABC$. Ἀποδείξαμε τοὺς ἑξῆς τύπους:

Ἂν $A', B'C'$ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου στὸ $\triangle ABC$ κύκλου (βλ. σχῆμα 1), τότε



Σχῆμα 1: Τῦποι (1)

$$AB' = \tau - a = AC' , \quad BA' = \tau - b = BC' , \quad CA' = \tau - c = CB' . \tag{1}$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R \qquad \text{Νόμος τῶν ἡμιτόνων}$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}\sin\hat{A}\cdot b\cdot c = \frac{1}{2}\sin\hat{B}\cdot a\cdot c = \frac{1}{2}\sin\hat{C}\cdot a\cdot b$$

$$\mathbb{E} = \rho\cdot\tau\,, \quad \mathbb{E} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

Συζητήθηκαν ἐκτενῶς τὰ (α′) καὶ (β′) τῆς ἀσκήσεως 6 τοῦ φυλλαδίου Ασκησεις επι των Βασικων Γνωσεων - Τριγωνα και Παραλληλογραμμα.