Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 6
Τετάρτη 6-10-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

1. Προτάθηκε γιὰ ἐπίλυση ἡ ἑξῆς ἄσκηση: *Δύο κύκλοι ἐφάπτονται (ἐσωτερικὰ ἢ ἐξωτερικὰ) στὸ σημεῖο T. Ἀπὸ τὸ T φέρομε δύο τυχαῖες τέμνουσες TAA' καὶ TBB' τῶν κύκλων, μὲ τὰ σημεῖα A, B στὸν πρῶτο κύκλο καὶ τὰ A', B' στὸν δεύτερο. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ χορδὴ AB τοῦ πρώτου κύκλου εἶναι παράλληλη πρὸς τὴ χορδὴ $A'B'$ τοῦ δευτέρου κύκλου.*
   Νὰ ἐξεταστοῦν χωριστὰ οἱ περιπτώσεις ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ἐπαφῆς τῶν δύο κύκλων.
   Ὡς ὑπόδειξη δόθηκε νὰ φέρετε τὴν κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων καὶ νὰ χρησιμοποιήσετε τὸ «θεώρημα γιὰ τὴ γωνία χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης».

2. Προτάθηκε, ἐπίσης, ἡ ἑξῆς ἄσκηση, ποὺ βασίζεται στὴν πρόταση «Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα, ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου...» (δυστυχῶς, ὑπάρχει δυσκολία στὴν ἐφαρμογὴ ἀκόμη καὶ αὐτῆς τῆς τόσο βασικῆς πρότασης....)
   Ἔστω τυχαῖο τετράπλευρο $ABCD$, κυρτὸ εἴτε μὴ κυρτό[1]. *Ἔστω ὅτι K, L, M, N εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν AB, BC, CD καὶ DA, ἀντιστοίχως καὶ O, P τὰ μέσα τῶν διαγωνίων AC καὶ BD. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα KM, LN καὶ OP ἔχουν κοινὸ μέσο.*
   Ἀποδεῖξτε τὴν ἄσκηση πρῶτα γιὰ κυρτὸ τετράπλευρο καὶ μετὰ γιὰ μὴ κυρτό.
   Ὑπόδειξη. Ἀποδεῖξτε πρῶτα ὅτι τὰ τετράπλευρα $KLMN$ καὶ $KPMO$ εἶναι παραλληλόγραμμα.

3. **Ἐγγεγραμμένα καὶ ἐγγράψιμα τετράπλευρα**. Συζητήθηκαν οἱ ἰδιότητες τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ ἐγγραψίμων τετραπλεύρων καὶ ἀποδείχθηκαν κριτήρια (ἱκανὲς συνθῆκες) γιὰ νὰ εἶναι ἕνα τετράπλευρο ἐγγράψιμο. Δεῖτε τὰ ἐδάφια 6.5 καὶ 6.6 τοῦ σχολικοῦ βιβλίου.

4. Συζητήθηκε ἡ ἑξῆς ἄσκηση, χωρὶς νὰ δοθεῖ ἡ πλήρης λύση της, ἡ ὁποία ἀφέθηκε στὴν προσωπικὴ μελέτη σας: *Ἔστω τρίγωνο ABC. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν BC, CA καὶ AB θεωροῦμε, ἀντιστοίχως, τὰ σημεῖα A', B' καὶ C', τυχαῖα. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ κύκλος,*

[1] Βλ. σελίδα 3, στὴν Περιγραφη του Μαθηματος - Ορισμοι και Συμβασεις.

ποὺ διέρχεται διὰ τῶν A, B', C', ὁ κύκλος διὰ τῶν B, A', C' καὶ ὁ κύκλος διὰ τῶν C, A', B' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Δόθηκε ἡ ἑξῆς ὑπόδειξη: Ἔστω ὅτι οἱ δύο προαναφερθέντες κύκλοι, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ C', ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερο κοινὸ σημεῖο T. Ἀντὶ ν' ἀποδείξετε ὅτι καὶ ὁ τρίτος κύκλος διέρχεται διὰ τοῦ T, εἶναι ἁπλούστερο ν' ἀποδείξετε ὅτι τὸ τετράπλευρο $CA'TB'$ εἶναι ἐγγράψιμο.

Νὰ ἐξετάσετε μετὰ καὶ τὶς περιπτώσεις ποὺ ἕνα ἕως τρία ἀπὸ τὰ A', B', C' βρίσκονται στὶς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν. Θὰ σᾶς ὁδηγήσει ἡ ἀπόδειξη τῆς ἀρχικῆς περίπτωσης, ὅταν τὰ A', B', C' εἶναι στὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου (στὸ ἐσωτερικό τους).