Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

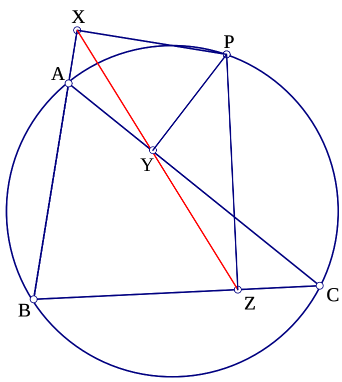
Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 7
Δευτέρα 11-10-2010

Συνοπτικὴ περιγραφὴ

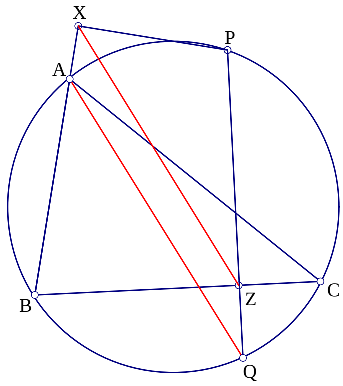
1. Συζητήθηκε ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα βλέπουν ἕνα δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ὑπὸ δεδομένη γωνία (τοῦ διαστήματος $(0, \pi)$. Ἰσχυρὴ σύσταση: Μελετῆστε τὸ ἐδάφιο 6.4 τοῦ σχολικοῦ βιβλίου!
   Ὡς βασικὲς ἐφαρμογὲς αὐτοῦ τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου δόθηκαν δύο κατασκευὲς τριγώνου ABC: Ἡ πρώτη, ὅταν δίδονται τὰ στοιχεῖα $a, \angle A, \upsilon_a$, καὶ ἡ δεύτερη, ὅταν δίδονται τὰ στοιχεῖα $a, \angle A, \mu_a$.

2. **Εὐθεία Simson - Θεώρημα**. *Οἱ προβολὲς X, Y, Z τυχόντος σημείου P τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνο ABC κύκλου ἐπὶ τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου εἶναι σημεῖα*



Σχῆμα 1: Εὐθεία Simson

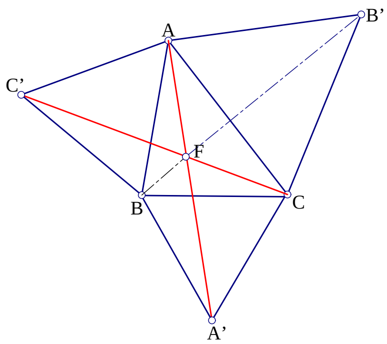
συνευθειακά. Γιὰ τὴν ἀπόδειξη δουλέψαμε μόνο μὲ τὶς PX καὶ PZ (ἀγνοώντας τὴν PY) ἀποδεικνύοντας, ὡς λῆμμα, ὅτι (βλ. σχῆμα 2) ἡ εὐθεία XZ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν AQ.
Συνοπτικὴ ἀπόδειξη τοῦ λήμματος: $PXBZ$ ἐγγράψιμο (δύο ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ὀρθές) $\Rightarrow \angle PZX = \angle PBX = \angle PBA =$ (ἐγγεγραμμένες γωνίες) $\angle PQA$. Ἄρα οἱ XZ καὶ AQ, τεμνόμενες ἀπὸ τὴν PQ, σχηματίζουν *ἐντὸς - ἐκτὸς - ἐπὶ τὰ*



Σχῆμα 2: Εὐθεία Simson (Λῆμμα)

αὐτὰ μέρη γωνίες ἴσες.
Ἂν στὸ λῆμμα, ἀντὶ τῶν PX καὶ PZ, δουλεύαμε μὲ τὶς PY καὶ PZ, θὰ καταλήγαμε, κατ' ἀναλογίαν, στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ XY εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν AQ. Καθώς, ὅμως, οἱ XY καὶ XZ εἶναι παράλληλες πρὸς τὴν ἴδια εὐθεία (τὴν AQ), τὸ συμπέρασμά μας εἶναι ὅτι τὰ σημεῖα X, Y, Z εἶναι συνευθειακά, ποὺ ἀποδεικνύει τὸ Θεώρημα τοῦ Simson.

3. **Σημεῖο Fermat τριγώνου - Θεώρημα**. *Μὲ βάση τὶς πλευρὲς τριγώνου, ἐξωτερικῶς αὐτοῦ, κατασκευάζομε ἰσόπλευρα τρίγωνα BCA', CAB', ABC'. Τότε, οἱ εὐθεῖες*

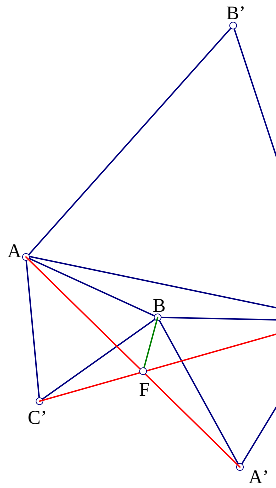


Σχῆμα 3: Σημεῖο Fermat

AA', BB' καὶ CC' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἔστω F, τὸ ὁποῖο καλεῖται σημεῖο Fermat τοῦ τριγώνου. Κάθε πλευρὰ τοῦ τριγώνου φαίνεται ἀπὸ τὸ F ὑπὸ γωνία $2\pi/3$.
Ἀπόδειξη: Στὸ σχῆμα 3 ἔχομε φέρει τὶς εὐθεῖες AA' καὶ CC', καὶ ἔστω F τὸ σημεῖο τομῆς τους. Θὰ δείξομε ὅτι τὰ σημεῖα B, F, B' εἶναι συνευθειακά, ἄρα, στὸ σχῆμα, βλέπομε τὰ σημεῖα αὐτὰ σὰν νὰ σχηματίζουν γωνία, ἡ ὁποία ἀποδεικνύομε ὅτι εἶναι ἴση μὲ 180^o, ὡς ἑξῆς (συνοπτικά): $\triangle BAA' = \triangle BC'C$ (στροφὴ τοῦ πρώτου τριγώνου, μὲ κέντρο τὴν κορυφὴ B κατὰ 60^o) $\Rightarrow \angle FAB = \angle FC'B \Rightarrow FAC'B$

ἐγγράψιμο $\Rightarrow \angle AFB = 120^o \Rightarrow \angle BFA' = 60^o = \angle BCA' \Rightarrow FBA'C$ ἐγγράψιμο $\Rightarrow \angle A'FC = 60^o \Rightarrow FAB'C$ ἐγγράψιμο $\Rightarrow \angle AFB' = 60^o$. Ἄρα, $\angle BFB' = \angle BFA + \angle AFB' = 120^o + 60^o = 180^o$.

Ἰσχυρὴ σύσταση: Νὰ ἐπαναλάβετε τὴν παραπάνω ἀπόδειξη στὴν περίπτωση ποὺ μία ἀπὸ τὶς γωνίες τοῦ τριγώνου εἶναι $> 120^o$, ὅπως στὸ σχῆμα 4, ὁπότε, καθὼς ἀποδεικνύεται, τὸ σημεῖο Fermat βρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Σ' αὐτὴ τὴν



Σχῆμα 4: Σημεῖο Fermat-Περίπτωση γωνίας $> 120^o$

περίπτωση (παρατηρῆστε ὅτι, τώρα, τὸ F δὲν εἶναι μεταξὺ τῶν B, B', ὅπως πρίν) θὰ μιμηθεῖτε τὴν προηγούμενη ἀπόδειξη, ἀλλὰ θὰ καταλήξετε στὴν ἰσότητα $\angle AFB = 60^o = \angle AFB'$, ποὺ συνεπάγεται τὴν 'εὐθυγράμμιση' τῶν σημείων F, B, B'.