Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

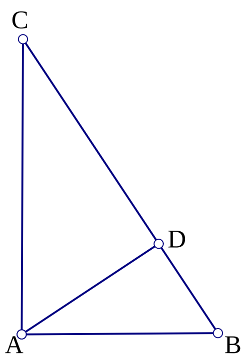
Μάθημα 9
Δευτέρα 18-10-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Ὑπενθύμιση τοῦ *Θεωρήματος τοῦ Θαλῆ*. Δεῖτε καὶ ἐδάφιο 7.7 τοῦ σχολικοῦ βιβλίου. Τονίσθηκε, γιὰ ἄλλη μιὰ φορά, ὅτι, ἐνῶ ἡ διατύπωση τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι πολὺ ἁπλῆ, ἡ πλήρης ἀπόδειξή του ἀπαιτεῖ τὴ χρήση ὁρίων, ἄρα προϋποθέτει τὴν κατασκευὴ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὅμοια τρίγωνα. Δεῖτε κεφάλαιο 8 τοῦ σχολικοῦ βιβλίου. Τονίσθηκε ὅτι ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, π.χ. τὰ τρίγωνα ABC καὶ XYZ, εἶναι πολὺ βοηθητικὸ νὰ γράφεται ἡ σχέση ὁμοιότητάς τους ἔτσι ὥστε οἱ κορυφὲς τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου τριγώνου, στὶς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν ἴσες γωνίες, νὰ γράφονται μὲ τὴν ἴδια σειρά. Δηλαδή, ἂν $\angle A = \angle X$, $\angle B = \angle Y$ καὶ $\angle C = \angle Z$, τότε, καλὸν εἶναι νὰ γράψομε τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ὡς $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$, ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτουν χωρὶς δυσκολία οἱ σωστὲς ἀναλογίες: $\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ} = \frac{BC}{YZ}$. Ἂν γράψομε, π.χ. $\triangle ABC \sim \triangle YXZ$, ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι μὲν σωστή, ἀλλὰ ὑπάρχει κίνδυνος νὰ γράψομε λανθασμένα τὶς ἰσότητες ἀναλογίας τῶν πλευρῶν· δεῖτε καὶ τὸ σχόλιο στὰ Εισαγωγικα τοῦ μαθήματος, σελίδα 3. Δόθηκαν κάποιες θεμελιώδεις ἐφαρμογές:

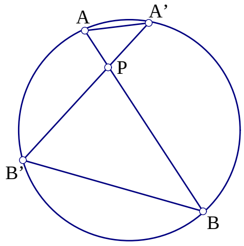
1. *Πυθαγόρειο Θεώρημα.* Ἔστω τρίγωνο ABC ὀρθογώνιο στὸ A καὶ AD τὸ ὕψος του (σχῆμα 1). Τότε $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ καὶ $\triangle ACD \sim \triangle BCA$. (Προσέξτε τὴ



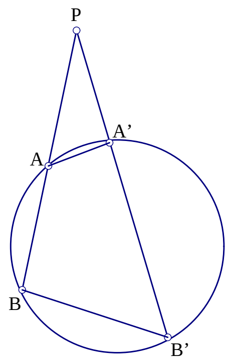
Σχῆμα 1: Πυθαγόρειο Θεώρημα

διάταξη μὲ τὴν ὁποία εἶναι γραμμένες οἱ κορυφὲς τῶν δύο τριγώνων καὶ δεῖτε τὸ σχόλιο, παραπάνω!) Ἀπὸ τὴν πρώτη ὁμοιότητα προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}$, ἀπ' τὴν ὁποία $AB^2 = BC \cdot BD$. Ἀπ' τὴ δεύτερη ὁμοιότητα προκύπτει, μὲ ἀνάλογο τρόπο, $AC^2 = BC \cdot CD$. Προσθέτοντας κατὰ μέλη, παίρνομε $AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + DC) = BC^2$, δηλαδή, ἀποδείξαμε τὸ Πυθαγόρειο Θεώρημα.

2. *Δύναμη σημείου ὡς πρὸς κύκλο.* Ἔστω κύκλος $\mathcal{C}$ κέντρου O καὶ ἀκτίνας R καὶ σημεῖο P στὸ ἐσωτερικὸ ἢ στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου. Ἔστω AB χορδὴ τοῦ κύκλου, διερχόμενη διὰ τοῦ P (στὴν περίπτωση ποὺ τὸ P εἶναι ἐξωτερικῶς τοῦ κύκλου, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ προέκταση τῆς AB διέρχεται διὰ τοῦ P). Ὑπάρχουν ἄειρες τέτοιες χορδές, ἀλλὰ γιὰ ὁποιαδήποτε ἀπὸ αὐτές, τὸ γινόμενο $PA \cdot PB$ δὲν ἀλλάζει, ἄρα ἐξαρτᾶται μόνο ἀπὸ τὸν κύκλο $\mathcal{C}$ καὶ τὸ σημεῖο P καὶ λέγεται *δύναμη τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὸν κύκλο $\mathcal{C}$*· βλ. σχήματα 2 καὶ 3.



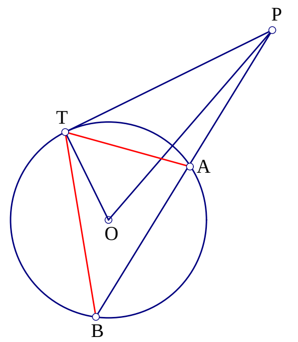
Σχῆμα 2: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$



Σχῆμα 3: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ ἰσχυρισμοῦ (ἴδια στὴν περίπτωση ἐσωτερικοῦ ἢ ἐξωτερικοῦ σημείου P), δὲν ἔχομε παρὰ νὰ θεωρήσομε δύο τυχαῖες τέμνουσες PAB καὶ $PA'B'$ καὶ ν' ἀποδείξομε ὅτι $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$. Ἡ σχέση αὐτὴ προκύπτει ἂν παρατηρήσομε ὅτι $\triangle PAA' \sim \triangle PB'B$. (Προσέξτε τὴ διάταξη γραφῆς τῶν κορυφῶν! Ἐλέγξτε τὶς ἰσότητες γωνιῶν!)

Ἄλλη ἔκφραση τῆς δύναμης τοῦ P ὡς πρὸς τὸν κύκλο $\mathcal{C}$. Ἂν θεωρήσομε τὴν ἐφαπτομένη PT (σχῆμα 4), τότε $\triangle PTA \sim \triangle PBT$. (Ἐλέγξτε τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν! Θυμηθεῖτε τὴ γωνία χορδῆς-ἐφαπτομένης!) Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα αὐτὴ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$ ἄρα $PT^2 = PA \cdot PB$.



Σχῆμα 4: $PT^2 = PA \cdot PB$

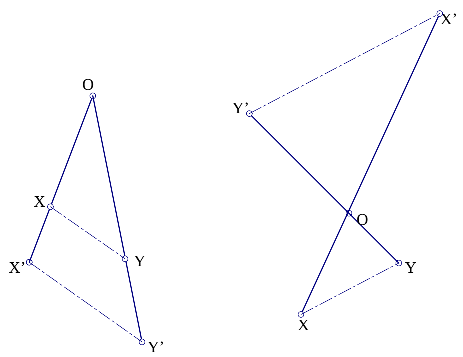
Ἀπὸ τὸ Πυθαγόρειο Θεώρημα στὸ τρίγωνο OTP ἔχομε $PO^2 = PT^2 + T0^2 = PT^2 + R^2$, ἄρα,

> *Ὅταν τὸ P βρίσκεται στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου κέντρου O καὶ ἀκτίνας R, καὶ T εἶναι τὸ σημεῖο ἐπαφῆς τῆς διὰ τοῦ P ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου, τότε ἡ δύναμη τοῦ P ὡς πρὸς τὸν κύκλο ἰσοῦται μὲ $PT^2 = PO^2 - R^2$.*

Στὴν περίπτωση ποὺ τὸ P εἶναι στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου, γιὰ νὰ βροῦμε μιὰν ἀνάλογη ἔκφραση τῆς δύναμης τοῦ P, φέρνομε τὴ διάμετρο AB, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ P. (Κάνετε σχῆμα!) Ἔστω ὅτι τὸ P βρίσκεται στὴν ἀκτίνα OA. Τότε, ἡ δύναμη τοῦ P ἰσοῦται μὲ $PA \cdot PB = (R - PO)(R + PO) = R^2 - PO^2$. Συνεπῶς,

> *Ὅταν τὸ P βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου κέντρου O καὶ ἀκτίνας R, τότε ἡ δύναμη τοῦ P ὡς πρὸς τὸν κύκλο ἰσοῦται μὲ $PT^2 = R^2 - PO^2$.*

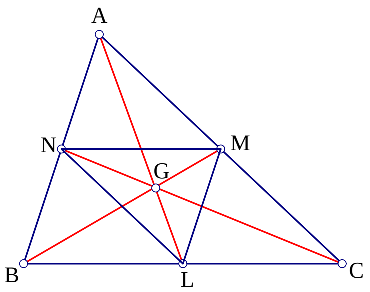
Ὁμοιοθεσία. Δίδονται, σημεῖο O καὶ ἀριθμὸς $\lambda \neq 0$. Ἡ ὁμοιοθεσία κέντρου O καὶ λόγου λ εἶναι ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ σὲ κάθε σημεῖο X ἀντιστοιχεῖ τὸ (μοναδικὸ) σημεῖο X' γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει $\overline{OX'}/\overline{OX} = \lambda$. Ὁ συμβολισμὸς μὲ τὴ 'μπάρα' πάνω ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, σημαίνει ὅτι, ἂν $\lambda > 0$, τὸ X' ἐπιλέγεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας OX (σχῆμα 5, ἀριστερά), ἐνῶ ἂν $\lambda < 0$, τὸ X' ἐπιλέγεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας, ποὺ εἶναι ἀντίθετη τῆς OX (σχῆμα 5, δεξιά). Τὸ σημεῖο X', δηλαδή, ἡ εἰκόνα τοῦ X



Σχῆμα 5: Ὁμοιοθεσία: Ἀριστερά, $\lambda > 0$. Δεξιά, $\lambda < 0$

μέσω τῆς ὁμοιοθεσίας, εἶναι τὸ ὁμοιόθετο τοῦ σημείου X, ὡς πρὸς ὁμοιοθεσία κέντρου O καὶ λόγου λ. Γενικά, τὸ σχῆμα ποὺ προκύπτει ἂν πάρομε τὰ ὁμοιόθετα (ὡς πρὸς δεδομένη ὁμοιοθεσία) ὅλων τῶν σημείων ἑνὸς δεδομένου σχήματος $\mathcal{S}$ χαρακτηρίζεται ὡς ὁμοιόθετο τοῦ $\mathcal{S}$.

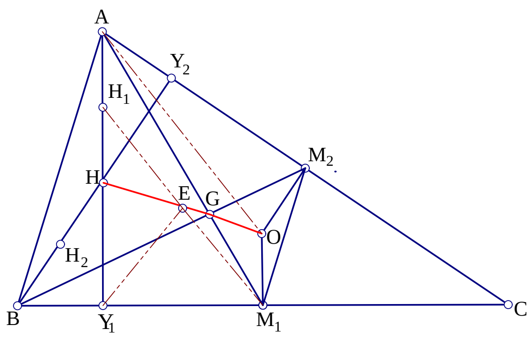
Θεμελιώδης ἰδιότητα. Ἂν X', Y' εἶναι τὰ ὁμοιόθετα τῶν X, Y, τότε ἡ εὐθεία $X'Y'$ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν εὐθεία XY καὶ τὸ ὁμοιόθετο ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου τῆς XY βρίσκεται ἐπὶ τῆς $X'Y'$.
Βάσει αὐτῆς τῆς ἰδιότητας, ἡ ὁποία εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ θεωρήματος τοὺ Θαλῆ, βλέπομε, γιὰ παράδειγμα, ὅτι, ἂν L, M, N εἶναι, ἀντιστοίχως, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν BC, CA, AB ἑνὸς τριγώνου ABC καὶ G εἶναι τὸ κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου, τότε τὸ τρίγωνο ABC εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ τριγώνου LMN ὡς πρὸς ὁμοιοθεσία κέντρου G καὶ λόγου -2 (σχῆμα 6). Παρατηρῆστε ὅτι αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ νὰ ποῦμε ὅτι τὸ



Σχῆμα 6: Τὰ τρίγωνα ABC καὶ LMN εἶναι ὁμοιόθετα

τρίγωνο LMN εἶναι τὸ ὁμοιόθετο τοῦ τριγώνου ABC ὡς πρὸς ὁμοιοθεσία κέντρου G καὶ λόγου $-1/2$.

Εὐθεία τοῦ Euler. Ἔστω τρίγωνο ABC. Στὸ σχῆμα 7 σχεδιάζομε τὰ ὕψη AY_1, BY_2, τὶς διαμέσους AM_1, BM_2 ἀπὸ τὶς κορυφὲς A καὶ B, καὶ τὶς μεσοκάθετες OM_1, OM_2 τῶν πλευρῶν BC καὶ AC, ἀντιστοίχως. Συνεπῶς, H εἶναι τὸ ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου, G τὸ κέντρο βάρους του καὶ O τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ $\triangle ABC$ κύκλου. Ἐξετάζομε ποιὸ εἶναι τὸ ὁμοιόθετο τοῦ $\triangle M_1M_2O$ ὡς πρὸς τὴν ὁμοιοθεσία κέντρου G



Σχῆμα 7: Εὐθεία Euler

καὶ λόγου -2. Θυμηθεῖτε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ μία κορυφὴ εἶναι διπλάσια τῆς ἀπόστασής του ἀπὸ τὸ μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Ἄρα, τὰ ὁμοιόθετα τῶν σημείων M_1, M_2 ὡς πρὸς τὴν παραπάνω ὁμοιοθεσία εἶναι τὰ A καὶ B, ἀντιστοίχως. Ποιὸ εἶναι τὸ ὁμοιόθετο τοῦ O; Δὲν τὸ γνωρίζομε, πρὸς τὸ παρόν. Ἔστω ὅτι εἶναι τὸ σημεῖο X (τὸ X δὲν ἐμαφανίζεται στὸ σχῆμα). Τὸ ὁμοιόθετο τοῦ OM_1 εἶναι, συνεπῶς, τὸ XA. Ἀλλὰ τὸ OM_1 εἶναι κάθετο στὴν BC, ἄρα, καὶ τὸ ὁμοιόθετό του XA εἶναι κάθετο στὴν BC (τὰ ὁμοιόθετα τμήματα εἶναι παράλληλα, καθὼς εἴπαμε παραπάνω). Ἄρα, ἡ εὐθεία AX συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεία AY_1, ὁπότε τὸ X εἶναι σημεῖο τῆς AY_1. Ὁμοίως, ὅμως, τὸ X πρέπει ν' ἀνήκει καὶ στὴν εὐθεία BY_2, ἄρα τὸ X εἶναι τὸ κοινὸ σημεῖο τῶν δύο ὑψῶν καί, συνεπῶς, $X = H$. Συμπέρασμα:

> Ὡς πρὸς τὴν ὁμοιοθεσία κέντρου G καὶ λόγου -2, τὸ ὁμοιόθετο τοῦ $\triangle OM_1M_2$ εἶναι τὸ $\triangle HAB$.

Τοῦτο, ὅμως, συνεπάγεται ὅτι τὸ O, τὸ ὁμοιόθετό του H καὶ τὸ κέντρο ὁμοιοθεσίας G εἶναι συνευθειακὰ σημεῖα καί, ἐπιπλέον, $\overline{GH}/\overline{GO} = -2$, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ G εἶναι μεταξὺ τῶν H καὶ O καὶ $GH = 2G0$. Ἔτσι, ἀποδείξαμε τὸ ἑξῆς:

> **Θεώρημα**. (ΕὐθείαEuler) *Σὲ κάθε τρίγωνο, τὸ κέντρο βάρους, τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ ὀρθόκεντρο εἶναι συνευθειακά σημεῖα. Πιὸ συγκεκριμένα, τὸ κέντρο βάρους κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων σημείων καὶ ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρο εἶναι διπλάσια τῆς ἀπόστασής του ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἡ εὐθεία ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀνήκουν τὰ τρία σημεῖα λέγεται* εὐθεία Euler *τοῦ τριγώνου.*