Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις στὰ Θεωρήματα Μενελάου καὶ Ceva

1. Ἔστω P τυχαῖο σημεῖο τῆς διαμέσου AM τριγώνου ABC. Ἔστω C' τὸ σημεῖο τομῆς τῆς BP μὲ τὴν AC καὶ B' τὸ σημεῖο τομῆς τῆς CP μὲ τὴν AB. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία $B'C'$ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν BC.

   Ὑπόδειξη. Ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ceva.

2. Ἔστω παραλληλόγραμμο $ABCD$, E σημεῖο ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB καὶ F σημεῖο ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BC, τέτοια ὥστε ἡ εὐθεία EF νὰ μὴν εἶναι παράλληλη πρὸς τὴ διαγώνιο AD. Ἀπὸ τὸ E φέρομε παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ BC, ἡ ὁποία τέμνει τὴ CD στὸ G, καὶ ἀπὸ τὸ F φέρομε παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ AB, ἡ ὁποία τέμνει τὴ AD στὸ H. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ GH δὲν εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν AD καί, ἐπιπλέον, οἱ εὐθεῖες EF, AC καὶ GH περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

   Ὑπόδειξη. Ἔστω O τὸ σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν AC καὶ EF. Ἐφαρμόστε τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου στὸ τρίγωνο ABC μὲ τέμνουσα τὴν εὐθεία EF καὶ ἐκφράστε τὸν λόγο OA/OC. Στὴ συνέχεια, ἔστω T τὸ σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν AC καὶ HG. Ἐφαρμόστε τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου στὸ τρίγωνο ADC μὲ τέμνουσα τὴν εὐθεία HG καὶ ἐκφράστε τὸν λόγο TA/TC. Διαπιστῶστε ὅτι $OA/OC = TA/TC$.

3. Ἔστω παραλληλόγραμμο $ABCD$ καὶ σημεῖο E ἐπὶ τῆς διαγωνίου BD, τέτοιο ὥστε $DE = DB/5$. Ἔστω ὅτι ἡ AE τέμνει τὴν CD στὸ H καὶ ἡ CE τέμνει τὴν AD στὸ Z. Ἀποδεῖξτε ὅτι $ZD/ZA = 3/4$ καὶ ὅτι ἡ ZH εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν AC.

   Ὑπόδειξη. Ἔστω O τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων. Τὰ δεδομένα σᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ὑπολογίσετε τὸν λόγο ED/EO. Μετά, ἐφαρμόστε τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου στὸ τρίγωνο AOD μὲ τέμνουσα τὴν ZE. Αὐτὸ θὰ σᾶς ἐπιτρέψει νὰ ὑπολογίσετε τὸν λόγο ZD/ZA. Τέλος, ἐφαρμόστε τὴν ἄσκηση 1.

4. Ἔστω τρίγωνο ABC, D τυχαῖο σημεῖο τῆς εὐθείας BC καὶ O τυχαῖο σημεῖο τῆς εὐθείας AD. Ἀποδεῖξτε ὅτι $(OBC)/(ABC) = OD/AD$. (Οἱ παρενθέσεις σημαίνουν ἐμβαδά.) [1]

5. Ἔστω τρίγωνο ABC, D τὸ μέσο τῆς AB καὶ E τὸ σημεῖο τῆς πλευρᾶς BC, γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει $CE = \frac{1}{3}BC$. Ἔστω O τὸ σημεῖο τομῆς τῶν AE καὶ CD. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ O εἶναι μέσο τῆς CD καὶ $AO = \frac{3}{4}AE$. Ἂν Z εἶναι τὸ σημεῖο τομῆς τῆς BO μὲ τὴν AC, δεῖξτε ὅτι $BO = \frac{3}{4}BZ$. Τέλος, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου AOC εἶναι τὸ $1/4$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ABC.

   Ὑπόδειξη. Ἐφαρμόστε τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου στὸ τρίγωνο DBC μὲ τέμνουσα τὴν AE. Ἐφαρμόστε τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου στὸ τρίγωνο ABE μὲ τέμνουσα τὴν CD. Ἐφαρμόστε τὸ θεώρημα τοῦ

[1] Ἡ ἄσκηση αὐτὴ εἶναι ἁπλῆ καὶ δὲν ἀπαιτεῖ τὴ χρήση τῶν θεωρημάτων Μενελάου ἢ Ceva. Θὰ σᾶς χρειαστεῖ στὴ λύση τῆς ἀσκήσεως 5.

Μενελάου στὸ τρίγωνο AOZ μὲ τέμνουσα τὴν BC. Μετά, ἐφαρμόστε τὴν ἄσκηση 1 καὶ διαπιστῶστε ὅτι ἡ εὐθεία EZ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν AB, ἄρα, ὁ λόγος στὸν ὁποῖο τὸ Z διαιρεῖ τὴν πλευρὰ AC εἶναι γνωστός. Τέλος, ἐφαρμόστε τὴν ἄσκηση 4.