# Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ

### ΑΠΛΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

1. Δίδεται εὐθεία $\epsilon$ καὶ σημεῖο $O$ ἐκτὸς αὐτῆς. Ἐπὶ τῆς $\epsilon$ κινεῖται σημεῖο $X$. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $OX$;

2. Ἡ ἄσκηση 1 γενικευμένη:
   Δίδεται εὐθεία $\epsilon$, σημεῖο $O$ ἐκτὸς αὐτῆς καὶ θετικὸς ἀριθμὸς $k$. Ἐπὶ τῆς $\epsilon$ κινεῖται σημεῖο $X$. Σὲ κάθε θέση του θεωροῦμε σημεῖο $P$ ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $OX$, τέτοιο ὥστε $\frac{PO}{PX} = k$. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου $P$;

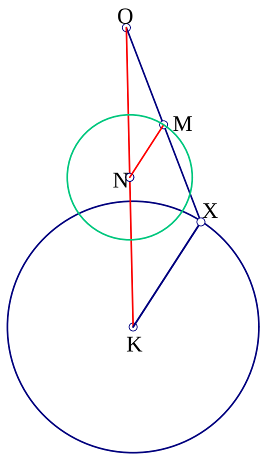
3. Ἡ ἀνάλογη τῆς ἀσκήσεως 1 μὲ κύκλο ἀντὶ εὐθείας.
   Δίδεται κύκλος κέντρου $K$ καὶ ἀκτίνας $r$ καὶ σημεῖο $O$ ὄχι ἐπὶ τῆς περιφέρειας. Ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου κινεῖται σημεῖο $X$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $OX$ εἶναι ὁ κύκλος μὲ κέντρο τὸ μέσο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $OK$ καὶ ἀκτίνας $r/2$.
   Ἡ λύση αὐτοῦ τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου δίδεται στὴ σελίδα ὡς ὑπόδειγμα γιὰ τὸ πῶς πρέπει νὰ γράφετε τὶς λύσεις τῶν ἀσκήσεων γεωμετρικῶν τόπων.

4. Ἡ ἄσκηση 3 γενικευμένη:
   Δίδεται κύκλος κέντρου $K$ καὶ ἀκτίνας $r$, σημεῖο $O$ ὄχι ἐπὶ τῆς περιφέρειας καὶ θετικὸς ἀριθμός $k$. Ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου κινεῖται σημεῖο $X$. Σὲ κάθε θέση του θεωροῦμε σημεῖο $P$ ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $OX$, τέτοιο ὥστε $\frac{PO}{PX} = k$. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου $P$;

5. Σ' ἕνα τρίγωνο $ABC$ οἱ κορυφὲς $B$ καὶ $C$ παραμένουν σταθερὲς, ἐνῶ ἡ κορυφὴ $A$ μεταβάλλεται ἔτσι ὥστε τὸ μῆκος τῆς διαμέσου $AM$ νὰ παραμένει σταθερό, ἴσο πρὸς δοθὲν μῆκος $\mu$. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ βαρυκέντρου $G$ τοῦ τριγώνου $ABC$;

*Λύση τῆς ἀσκήσεως 3.*

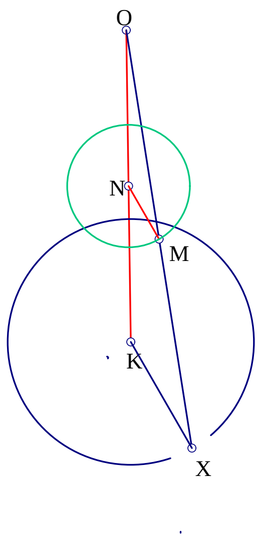
**᾿Ορθό**: (βλ. σχῆμα 1). ῎Εστω $X$ τυχὸν σημεῖο τοῦ κύκλου κέντρου $K$ καὶ ἀκτίνας $r$ καὶ $M$ τὸ μέσο τοῦ $OX$. Φέρομε τὸ (βοηθητικὸ) εὐθύγραμμο τμῆμα $OK$ καὶ ἔστω $N$ τὸ




Σχῆμα 1: Λύση τῆς ἀσκήσεως 3 - ὀρθό

μέσο του. Τὸ $NM$ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $OK$ καὶ $OX$ τοῦ $\triangle OKX$, ἄρα τὸ μῆκος του εἶναι τὸ μισὸ τῆς τρίτης πλευρᾶς $KX$ τοῦ τριγώνου (καὶ παράλληλο πρὸς αὐτή, ἀλλὰ αὐτὸ δεν μᾶς χρειάζεται στὴ συγκεκριμένη ἄσκηση). Συνεπῶς, $NM = r/2$. Ἀλλὰ τὸ $N$ εἶναι σταθερὸ σημεῖο, ἄρα τὸ $M$ ἀνήκει σε κύκλο κέντρου $N$ καὶ ἀκτίνας $r/2$ (πρασινωπὸς κύκλος στὸ σχῆμα).

**᾿Αντίστροφο**: Κάνομε χωριστὸ σχῆμα (βλ. σχῆμα 2). Τώρα ἔχομε τὸν 'πρασινωπὸ' κύκλο




Σχῆμα 2: Λύση τῆς ἀσκήσεως 3 - ἀντίστροφο

κέντρου $N$ καὶ ἀκτίνας $r/2$ καὶ πρέπει νὰ ἀποδείξομε ὅτι, ἂν $M$ εἶναι τυχαῖο σημεῖο του, τότε ὑπάρχει ἕνα σημεῖο $X$ στὸν ἀρχικὸ κύκλο (αὐτὸν μὲ κέντρο $K$ καὶ ἀκτίνα $r$), τέτοιο ὥστε τὸ $M$ νὰ εἶναι μέσο τοῦ $OX$. Ὁ ἁπλούστερος, ἂν καὶ κάπως ἔμμεσος, τρόπος γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ $X$, εἶναι ὁ ἑξῆς: Φέρομε τὴν $OM$ καὶ τὴν προεκτείνομε κατὰ ἴσο τμῆμα, ἔστω $MX$. Ἔτσι, τὸ $M$ εἶναι μέσο τῆς $OX$. *Ἀλλὰ εἶναι τὸ $X$ πάνω στὸν κύκλο κέντρου $K$ καὶ ἀκτίνας $r$;* (Γι' αὐτὸν τὸν λόγο ἔχει σχεδιασθεῖ 'κομμένος' ὁ κύκλος στὴ γειτονιὰ τοῦ $X$.) Ναί, διότι τὸ $NM$ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $OK$ καὶ $OX$ τοῦ $\triangle OKX$, ἄρα τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς $KX$ τοῦ τριγώνου εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ $NM$. Ἄρα, $KX = 2(r/2) = r$ καί, συνεπῶς, τὸ $X$ ἀνήκει στὸν μόλις προαναφερθέντα κύκλο.