Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φθινοπωρινὸ ῾Εξάμηνο 2010

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Σκοπὸς το υ μαθήματος. Τὸ μάθημα ἀπευθύνεται ὄχι μόνο σὲ φοιτητὲς ποὺ σκοπεύουν νὰ διδάξουν στὴ Μ.Ε., ἀλλὰ καὶ σὲ ὅσους διατήρησαν ἀγαθὴ ἀνάμνηση ἀπὸ τὴν Εὐκλείδεια Γεωμετρία (στὸ ἑξ ης, ΕΓ) τ ων σχολικ ων τους χρόνων. Γιὰ τοὺς περισσότερους νέους φοιτητές, ἡ ΕΓ ε ̓ ιναι τὸ ἰδανικώτερο μάθημα προκειμένου νὰ μυηθο υν στὸν παραγωγικὸ τρόπο σκέψης καὶ νὰ μελετήσουν κατόπιν πιὸ ἀφηρημένα καὶ δύσκολα μαθήματα. Σχετικά, μεταφέρω ἀπὸ τὸν πρόλογο το υ βιβλίου το υ I. Martin Isaacs, *Geometry for College Students*[1], σὲ κάπως ἐλεύθερη ἀπόδοση:

> ᾿Απὸ τὴν ἐποχὴ το υ Εὐκλείδη, ἐδ ω καὶ κάπου 2300 χρόνια, ἡ ΕΓ διδάσκεται ὡς παραγωγικὴ ἐπιστήμη μὲ θεωρήματα καὶ ἀποδείξεις. Γενιὲς σπουδαστ ων τ ης ΕΓ μαθαίνουν π ως νὰ σκέπτονται. Φυσικά, ὑπάρχουν κι ἄλλα ἀντικείμενα σπουδ ης, ἀπὸ τὰ ὁποία μαθαίνει κανεὶς τὸν παραγωγικὸ τρόπο το υ σκέπτεσθαι, ἀλλὰ ἡ ΕΓ ε ̓ ιναι ἰδιαιτέρως ἀποτελεσματική, καθὼς σ' αὐτὴν συνδυάζονται τέλεια *τὸ συγκεκριμένο* (γεωμετρικὸ σχ ημα) μὲ τὴν *εἰς βάθος γνώση* (μὴ τετριμμένες ἰδιότητες τ ων γεωμετρικ ων σχημάτων).[...] ῾Η ΕΓ ε ̓ ιναι ὄμορφη, ἐπίσης, καὶ μερικὰ ἀπὸ τὰ θεωρήματά της ε ̓ ιναι τόσο ἐκπληκτικά, σὰν νὰ πρόκειται περὶ θαύματος. Στὴν πραγματικότητα, ἀνάλογο σχόλιο θὰ μπορο υσε νὰ κάνει κάποιος γιὰ τὶς περισσότερες περιοχὲς τ ων Μαθηματικ ων, ἀλλὰ ἡ ΕΓ ε ̓ ιναι μοναδική, κατὰ τὸ ὅτι, τὰ δικὰ της 'θαύματα' τὰ βλέπει κανείς, ὁπότε μπορε ι ἀμέσως νὰ τὰ ἐκτιμήσει, ἀκόμη κι ἂν ε ̓ ιναι ἀμύητος. Γιὰ παράδειγμα, δὲν χρειάζεται κανεὶς ἰδιαίτερη μαθηματικὴ ἐμπειρία γιὰ νὰ σταθε ι μὲ θαυμασμὸ μπροστὰ στὸ γεγονὸς ὅτι, ἂν ἀπὸ κάθε κορυφὴ ὁποιουδήποτε τριγώνου φέρει εὐθεία κάθετη ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρά, οἱ τρε ις αὐτὲς εὐθε ιες θὰ ἔχουν κοινὸ σημε ιο [...]. Θὰ πρέπει νὰ ἐξακολουθήσομε τὴ σπουδὴ καὶ διδασκαλία τ ης ΕΓ, ἐπειδὴ ε ̓ ιναι ἐξαιρετικὰ ἑλκυστικὸ θέμα, ποὺ μ ας ἐξοικειώνει μὲ τὸν παραγωγικὸ συλλογισμὸ καὶ τὴ φύση τ ης μαθηματικ ης ἀπόδειξης.

Φιλοσοφία το υ μαθήματος. Θὰ ἀκολουθήσομε τὴν παράδοση το υ Εὐκλείδη καὶ τ ων περισσότερων διαδόχων του κατὰ τοὺς αἰ ωνες ποὺ ἀκολούθησαν: Θὰ ἀντλο υμε κάποιες (μόνο) πληροφορίες ἀπὸ ἕνα *προσεκτικὰ σχεδιασμένο* σχ ημα, χωρὶς νὰ ἐπιβεβαιώνομε τὶς πληροφορίες αὐτὲς μὲ αὐστηρὴ ἀπόδειξη. Γιὰ παράδειγμα, ἂν σ' ἕνα τρίγωνο ABC φέρομε τὴ διχοτόμο τ ης γωνίας A, θὰ ἀρκεστο υμε στὸ σχ ημα γιὰ νὰ βεβαιωθο υμε ὅτι ἡ διχοτόμος

[1] Pure and Applied Undergraduate Texts No 8, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 2009

τέμνει τὴν πλευρὰ BC (δηλαδή, δὲν ε᾿ ιναι παράλληλη πρὸς τὴν BC) καί, μάλιστα, τὴν τέμνει σὲ σημε ιο μεταξὺ των B καὶ C. Καὶ οἱ δύο αὐτοὶ ἰσχυρισμοὶ ε᾿ ιναι δυνατὸν ν᾿ ἀποδειχθο υν αὐστηρὰ ἐπὶ τ η βάσει ἑνὸς συνόλου ἀξιωμάτων (π.χ. ἀξιωματικὸ σύστημα το υ Hilbert), πλὴν ὅμως, μιὰ τέτοιου εἴδους προσέγγιση θὰ καταντο υσε τὸ μάθημα σχολαστικὸ καὶ ἀνιαρό· τόσο ἀργὰ θὰ ἐξελισσόταν, ποὺ ἐλάχιστα ἀπὸ τὰ σημαντικὰ καὶ ὄμορφα θεωρήματα τ ης ΕΓ θὰ μπορούσαμε νὰ δο υμε, τελικά. Ἀπ᾿ τὴν ἄλλη, ὅμως, θὰ εἴμαστε προσεκτικοὶ μὲ τὰ σχήματα καὶ θὰ ἐξετάζομε μήπως κάτι ἀλλάζει στὸν συλλογισμό μας ἂν τροποποιηθε ι τὸ σχ ημα. Γιὰ παράδειγμα, αὐτὸ ποὺ ἰσχύει γιὰ τὴ διχοτόμο τ ης A –ὅτι, δηλαδή, τέμνει τὴν πλευρά BC σὲ σημε ιο μεταξὺ τ ων B καὶ C– δὲν ἰσχύει γιὰ τὸ ὕψος, στὴν περίπτωση ποὺ μία ἀπὸ τὶς γωνίες B ἢ C ε᾿ ιναι ἀμβλεία. Ἄλλο πράδειγμα: Ἂν στὸ τρίγωνο ABC ε᾿ ιναι D τὸ σημεὶο τομ ης τ ης διχοτόμου τ ης γωνίας A μὲ τὴν πλευρὰ BC καὶ συμβαίνει νὰ ε᾿ ιναι $AB < AC$, τότε φαίνεται στὸ σχ ημα ὅτι $BD < CD$, ἀλλὰ αὐτὸ δὲν θὰ τὸ δεχθο υμε δίχως ἀπόδειξη. *Τὸ τί θὰ δεχθο υμε ἀναπόδεικτο, βασιζόμενοι στὸ σχ ημα μας, καὶ τί ὄχι, ε᾿ ιναι θέμα ἐμπειρίας καὶ δὲν μπορο υμε νὰ τὸ ὁρίσομε ἐκ τ ων προτέρων τώρα.*

Προαπαιτούμενα. Ἡ βασικὴ ὕλη το υ σχολικο υ βιβλίου *Εὐκλείδεια Γεωμετρία* (ΟΕΔΒ). Πιὸ συγκεκριμένα, ὅλη ἡ ὕλη τ ων καφαλαίων 2,3,4,5,6. Ἀπὸ τὸ κεφάλαιο 7, τὰ ἐδάφια 7.1-7.5. Ὅλη ἡ ὕλη το υ κεφαλαίου 8. Ἀπὸ τὸ κεφάλαιο 10, τὰ ἐδάφια 10.1-10.3. Καθὼς θὰ ἐξελίσσεται τὸ μάθημα, θὰ γίνεται ὑπόμνηση τ ης παραπὰνω ὕλης, ἀποσαφήνιση κάποιων ἐννοι ων, ἐπισήμανση 'ὀλισθηρ ων σημείων', αὐστηρότερη παρουσίαση κάποιων σημείων κλπ, ἀλλὰ ὅλ᾿ αὐτὰ κυρίως μέσῳ ἀσκήσεων, *ἡ ἐπίλυση τ ων ὁποίων ἀποτελε ι τὸ βασικώτερο μέρος τ ης μελέτης σας, ἐπὶ τ η βάσει το υ ὁποίου καὶ θὰ ἐξετασθε ιτε.*

Συμβολισμοὶ - Ὁρολογία. Θὰ υἱοθετηθε ι ὁ συμβολισμὸς το υ παραπάνω σχολικο υ βιβλίου. Σχετικά, ἐπισημαίνονται τὰ ἑξ ης:

• Χρησιμοποιο υμε τὸ ἴδιο σύμβολο γιὰ τὸ εὐθύγραμμο τμ ημα, καθὼς καὶ γιὰ τὸ μ ηκος του. Ἔτσι, τὸ εὐθύγραμμο τμ ημα μὲ ἄκρα τὰ A, B συμβολίζεται AB (ἢ BA), ἀλλὰ καὶ τὸ μ ηκος του συμβολίζεται μὲ τὸ AB (ἢ BA). Μερικὲς φορὲς χρησιμοποιε ιται τὸ σύμβολο AB γιὰ τὴν εὐθεία, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημε ια A καὶ B. Ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα θὰ ε᾿ ιναι πάντοτε σαφὲς μὲ ποιὰ ἔννοια χρησιμοποιε ιται τὸ σύμβολο AB.

• Μιὰ συντομογραφία γιὰ τὸ τρίγωνο (π.χ.) ABC ε᾿ ιναι $\triangle ABC$. Ἡ γωνία το υ τριγώνου στὴν κορυφὴ A συμβολίζεται $\angle A$, ἢ $\hat{A}$, ἢ $\widehat{BAC}$, ἢ $\widehat{CAB}$. Πάντοτε, μὲ τὸν ὅρο *γωνία τριγώνου* ἐννοο υμε *ἐσωτερικὴ* γωνία τοὺ τριγώνου. Ἀνάλογα καὶ γιὰ ὅλα τὰ κυρτὰ πολύγωνα. Ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τὼν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὸ ἴδιο σύμβολο χρησιμοποιε ιται γιὰ τὴ γωνία (ὡς γεωμετρικὸ ἀντικείμενο) καὶ γιὰ τὸ μέτρο της (ὡς ἀριθμό, σὲ μο ιρες ἢ ἀκτίνια). Ἔτσι, θὰ λέμε, γιὰ παράδειγμα, ὅτι «ἡ γωνία A ε᾿ ιναι ἀπέναντι τ ης πλευρ ας BC», καθὼς ἐπίσης καὶ $\angle A = \pi/3$.

• Δύο ἐπίπεδα σχήματα θεωρο υνται ἴσα, ἂν ὑπάρχει *στερεὰ κίνηση* ἡ ὁποία φέρνει τὸ ἕνα σχ ημα σὲ σύμπτωση μὲ τὸ ἄλλο. Λέγοντας «στερεὰ κίνηση» ἐννοο υμε *στροφή*, εἴτε *μεταφορά*, εἴτε *ἀνάκλαση ὡς πρὸς εὐθεία*, εἴτε συνδυασμὸ αὐτ ων. Σημει ωστε ὅτι, ὅσον ἀφορ ᾳ στὴν ἀνάκλαση ὡς πρὸς εὐθεία, ε᾿ ιναι σὰν νὰ περιστρέφομε τὸ σχ ημα περὶ τὴν εὐθεία, βγαίνοντας ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο καὶ νὰ 'ξαναπροσγειωνόμαστε' ξανὰ στὸ ἐπίπεδο. Ὅταν, λοιπόν,λέμε ὅτι τὰ τρίγωνα ABC καὶ DEF ε᾿ ιναι ἴσα, ἐννοο υμε ὅτι, μὲ μία στερεὰ κίνηση, τὸ $\triangle DEF$ ἔρχεται καὶ συμπίπτει μὲ τὸ $\triangle ABC$. Ἐπιπλέον, ἂν ἡ κορυφὴ D συνέπεσε μὲ τὴν A, ἡ E μὲ τὴ B καὶ ἡ F μὲ τὴ C, τότε θὰ γράψομε $\triangle ABC = \triangle DEF$, ἀλλὰ ὄχι (γιὰ παράδειγμα) $\triangle ABC = \triangle EDF$. Ἐπίσης, ἂν ἰσχυριστο υμε, π.χ. ὅτι $\triangle FDE = \triangle ABC$, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει στερεὰ κίνηση, ἡ ὁποία φέρνει τὴν κορυφὴ F στὴν κορυφὴ A, τὴν κορυφὴ D στὴν B καὶ τὴν κορυφὴ E στὴ C καί, κατὰ συνέπεια, $AB = FD$, $BC = DE$, $CA = EF$ καὶ $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle D$ καὶ $\angle C = \angle E$. Ἀνάλογη σύμβαση κάνομε καὶ γιὰ τὰ πολύγωνα.

• Γιὰ τὴν ὁμοιότητα εὐθυγράμμων σχημάτων θὰ υἱοθετήσομε τὸν ὁρισμὸ το υ σχολικο υ βιβλίου. Κατ' ἀναλογίαν μὲ τὴ σύμβαση στὸ συμβολισμὸ τ ης ἰσότητας τριγώνων, στὴν περίπτωση τ ης ὁμοιότητας τριγώνων, ὅταν, γιὰ παράδειγμα, γράφομε $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, ἐννο υμε ὅτι τὰ τρίγωνα $\triangle ABC$ καὶ $\triangle DEF$ ε᾿ ιναι ὅμοια μὲ τέτοιο τρόπο, ὥστε $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ καί, συνεπ ως, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ καὶ $\angle C = \angle F$. Ἄρα, ἂν ἰσχύει ὅτι $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, δὲν ε᾿ ιναι, ἐν γένει, σωστὸ ὅτι $\triangle ABC \sim \triangle EFD$.

• Ἂν ἕνα τρίγωνο ABC ε᾿ ιναι ἰσοσκελές, μὲ $AB = AC$, τότε ἡ κορυφὴ A χαρακτηρίζεται ὡς **ἡ** κορυφὴ το υ ἰσοσκελο υς τριγώνου, ἐν ω ἡ πλευρὰ BC λέγεται *βάση* το υ ἰσοσκελο υς τριγώνου.

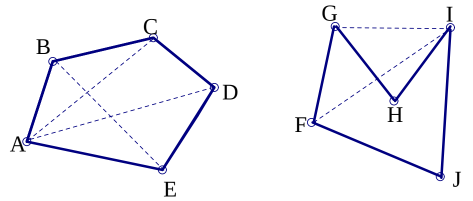
Ὅταν ἔχομε δύο τρίγωνα $\mathcal{T}$ καὶ $\mathcal{T}'$ καὶ λέμε ὅτι αὐτὰ «ἔχουν δύο πλευρὲς ἴσες», ἐννοο υμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα ζε υγος διαφορετικ ων πλευρ ων π_1, π_2 το υ τριγώνου $\mathcal{T}$ κσὶ ἕνα ζε υγος διαφορετικ ων πλευρ ων π_1', π_2' το υ τριγώνου $\mathcal{T}'$, ἔτσι ὥστε $\pi_1 = \pi_1'$ καὶ $\pi_2 = \pi_2'$. Ἀνάλογα, ὅταν λέμε ὅτι τὰ τρίγωνα «ἔχουν δύο γωνίες ἴσες», ἢ τρε ις πλευρὲς ἴσες, ἢ τρε ις γωνίες ἴσες. Ἔτσι, ἡ ἔκφραση «τὰ τρίγωνα $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ ἔχουν δύο πλευρὲς ἴσες καὶ τὶς περιεχόμενες (σὲ αὐτὲς τὶς πλευρὲς) γωνίες ἴσες» σημαίνει τὴν ὕπαρξη πλευρ ων π_1, π_2 το υ τριγώνου $\mathcal{T}$ καὶ π_1', π_2' το υ τριγώνου $\mathcal{T}'$, ὅπως παραπάνω, μὲ τὴν ἐπιπλέον ἰδιότητα, ἡ γωνία το υ $\mathcal{T}$, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὶς πλευρὲς π_1 καὶ π_2, νὰ ε᾿ ιναι ἴση μὲ τὴ γωνία το υ $\mathcal{T}'$, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὶς πλευρὲς π_1' καὶ π_2'.

Συντομογραφία τ ων κριτηρίων ἰσότητας τριγώνων. Ὅταν σὲ μιὰ ἀπόδειξη ἰσχυριστο υμε ὅτι δύο τρίγωνα ε᾿ ιναι ἴσα καὶ γράψομε ἐντὸς παρενθέσεως **ΠΓΠ**, ἐννοο υμε ὅτι τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα συμβαίνει νὰ ἔχουν δύο πλευρὲς ἴσες καὶ τὶς γωνίες τὶς περιεχόμενες σ' αὐτὲς τὶς πλευρὲς ἴσες. Ἀνάλογη συντομογραφία ε᾿ ιναι ἡ **ΓΠΓ** (κριτήριο μι ας πλευρ ας καὶ τ ων προσκειμένων σ' αὐτὴν γωνι ων) καὶ ἡ **ΠΠΠ** (κριτήριο τρι ων πλευρ ων).

• *Συμβολισμοὶ τ ων στοιχείων τριγώνου.* Ἔστω τὸ τρίγωνο ABC. Τὶς πλευρὲς ἀπέναντι τ ων κορυφ ων A, B, C συμβολίζομε, ἀντιστοίχως, a, b, c. Τὶς διαμέσους το υ τριγώνου ἀπὸ τὶς κορυφὲς A, B, C συμβολίζομε, ἀντιστοίχως, μὲ μ_a, μ_b, μ_c, τὶς ἀντίστοιχες διχοτόμους μὲ $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ καὶ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη μὲ $\upsilon_a, \upsilon_b, \upsilon_c$.

Ἡ ἡμιπερίμετρος το υ τριγώνου συμβολίζεται μὲ τ. Ἄρα, $2\tau = a + b + c$.

• *Διαγώνιος ἑνὸς πολυγώνου* λέγεται κάθε εὐθύγραμμο τμ ημα, μὲ ἄκρα δύο *μὴ διαδοχικὲς* κορυφὲς το υ πολυγώνου. Ἕνα πολύγωνο χαρακτηρίζεται *κυρτό*, ἂν ὅλες οἱ διαγώνιοί του περιέχονται ἐξ ὁλοκλήρου στὸ πολύγωνο (πολύγωνο $ABCDE$ στὸ διπλανὸ σχ ημα), διαφορετικά, τὸ πολύγωνο χαρακτηρίζεται *μὴ κυρτὸ* (πολύγωνο $FGHIJ$ στὸ διπλανὸ σχ ημα).



Στὸ σχ ημα οἱ διαγώνιοι ἔχουν σχεδιαστε ι μὲ διακεκομμένες γραμμές. Στὸ κυρτὸ πολύγωνο ἔχουν σχεδιαστε ι τρε ις ἀπὸ τὶς πέντε διαγωνίους του, ἐν ω στὸ μὴ κυρτὸ ἔχουν σχεδιαστε ι δύο ἀπὸ τὶς διαγωνίους του, ποὺ δὲν περιέχονται ἐξ ὁλοκλήρου στὸ πολύγωνο.