ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Εξέταση προόδου

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

30 Μαρτίου 2024

1. Έστω σώμα K, $f \in K[X]$ ανάγωγο τετάρτου βαθμού και L επέκταση του K βαθμού 6. Αποδείξτε ότι το L είναι αδύνατον να περιέχει ρίζα του f.

   Υπόδειξη. Έστω $v \in L$ ρίζα του f. Τότε $K < K(v) < L$.

2. (α') Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ αλγεβρικός αριθμός, n ακέραιος ≥ 2 και $\beta \in \mathbb{C}$ μια οποιαδήποτε n-οστή ρίζα του α. Εξηγήστε γιατί ο β είναι αλγεβρικός αριθμός.

   (β') Έστω L/K επέκταση σωμάτων, $\alpha, \beta \in L$ αλγεβρικά πάνω από το K και $f(X,Y) \in K[X,Y]$. Εξηγήστε γιατί το $f(\alpha,\beta) \in L$ είναι αλγεβρικό πάνω από το K.

   Υπόδειξη. Δείξτε πρώτα ότι η επέκταση $K(\alpha,\beta)/K$ είναι πεπερασμένη.

3. Έστω $f \in K[X]$ μη σταθερό. Τί σημαίνει ότι η επέκταση L/K είναι σώμα ανάλυσης του f πάνω από το K; Έστω ότι το L είναι σώμα ανάλυσης του f πάνω από το K και α είναι στοιχείο κάποιας επέκτασης του L. Αποδείξτε ότι το $L(\alpha)$ είναι σώμα ανάλυσης του f πάνω από το $K(\alpha)$.

4. Έστω $\rho = \sqrt[5]{2}$ η πραγματική πέμπτη ρίζα του 2.

   (α') Δείξτε ότι κάθε πέμπτη ρίζα της μονάδας, διάφορη του 1, είναι ρίζα του $p(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ και θεωρήστε δεδομένο ότι το $p(X)$ είναι ανάγωγο πάνω από το $\mathbb{Q}$ και όλες οι ρίζες του είναι μη πραγματικές. Έστω $\zeta \neq 1$ πέμπτη ρίζα της μονάδας. Δείξτε ότι τα $\zeta^j, j = 2,3,4$ είναι, επίσης, πέμπτες ρίζες της μονάδας.

   (β') Εκφράστε τις ρίζες του $X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ συναρτήσει των ρ, ζ και δείξτε ότι το $L = \mathbb{Q}(\rho,\zeta)$ είναι σώμα ανάλυσης του $X^5 - 2$ πάνω από το $\mathbb{Q}$, ενώ, πάνω από το $\mathbb{R}$, το ίδιο πολυώνυμο έχει σώμα ανάλυσης το $M = \mathbb{R}(\zeta)$.

   (γ') Υπολογίστε μια βάση της επέκτασης $L/\mathbb{Q}$.

   Υπόδειξη. Θεωρήστε τις διαδοχικές επεκτάσεις $\mathbb{Q} < K = \mathbb{Q}(\zeta) < K(\zeta) = Q(\rho,\zeta) = L$.

   (δ') Έστω ότι το $\alpha = 1 + 2\rho + 3\rho^4$ είναι ρίζα κάποιου ανάγωγου $f \in \mathbb{Q}[X]$. Αποδείξτε ότι το $\beta = 1 + 2\zeta^2\rho + 3\zeta^3\rho^4$ είναι, επίσης, ρίζα του f.