

B

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έαρινό Έξάμηνο 2019

Καθηγητής Ν. Γ. Τζανάκης

Έξεταστική περίοδος Ίουνίου (30 Μαΐου 2019)

1. Άν οί a, b εΐναι πρῶτοι μεταξύ τους και $k, n \geq 1$, δείξτε οτι $(5a^k + 3b^n, 8a^k + 5b^n) = 1$. **μον. 1**
2. Αποδείξτε οτι τὸ 13 διαιρεΐ τὸν ἀριθμὸ $5 \cdot 4^{2n+2} - 2 \cdot 3^{n+3}$ γιὰ κάθε $n \geq 0$. **μον. 1.5**
3. Ὑπολογΐστε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ μεταξύ 2200 και 2300, ὁ ὁποῖος, διαιρούμενος διὰ 7 ἀφήνει ὑπόλοιπο 1, διαιρούμενος διὰ 11 ἀφήνει ὑπόλοιπο 2 και διαιρούμενος διὰ 17 ἀφήνει ὑπόλοιπο 3. Γιὰ νὰ θεωρηθεΐ σωστὴ ἡ λύση σας **πρέπει νὰ κάνετε, ὅπωςδὴποτε, χρῆση τοῦ «Κινέζικου Θεωρήματος Ὑπολοίπων»**. **μον. 1.5**
4. Ὑπολογΐστε τὴν τιμὴ τοῦ συμβόλου Jacobi $\left(\frac{782}{1659}\right)$. **Δὲν ἐπιτρέπεται ἡ παραγοντοποίηση περιττῶν ἀριθμῶν**. Ἡ μόνη παραγοντοποίηση ποὺ ἐπιτρέπεται εΐναι, ὅταν ἔχετε ἄρτιο ἀριθμὸ, νὰ τὸν γράψετε ὡς γινόμενο δύναμης τοῦ 2 ἐπὶ περιττό. **μον. 1**
5. Πότε δύο λύσεις x_1, x_2 τῆς ἰσοτιμίας $13^x \equiv 6 \pmod{23}$ θεωροῦνται διαφορετικές; Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει τὸν διακριτὸ λογάριθμο ind_a ὅλων τῶν $a = 1, 2, \dots, 22$. (Ὁ γεννήτορας, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖο ἔχει ὑπολογισθεΐ ὁ διακριτὸς λογάριθμος, δὲν σὰς χρειάζεται.)

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ind_a	0	2	16	4	1	18	19	6	10	3	9	20	14	21	17	8	7	12	15	5	13	11

Ὑπολογΐστε ὅλες τὶς διαφορετικὲς λύσεις τῆς παραπάνω ἰσοτιμίας χρησιμοποιώντας αὐτὸν τὸν πίνακα. **Λύση μὲ δοκιμὲς ἀπορρίπτεται!** **μον. 1.5**

6. (α΄) Ἐστω $m > 1$. Ἐν $(a, m) = 1$ και $a^d \not\equiv 1 \pmod{m}$ γιὰ κάθε γνήσιο θετικὸ διαιρέτη d τοῦ $\phi(m)$, δείξτε οτι ὁ a εΐναι γεννήτορας $\text{mod } m$. Μετὰ ἀποδείξτε οτι τὸ 2 εΐναι γεννήτορας $\text{mod } 29$. **μον. 1**
(β΄) Μὲ τὴ βοήθεια **μόνο τῶν ὑπολογισμῶν τοῦ ἐρωτήματος (α΄)** και τῆς σχέσης $17 \equiv 12^3 \pmod{29}$ ὑπολογΐστε τὸν διακριτὸ λογάριθμο $\text{ind}_2(17)$. Ἐπίσης, **χωρὶς δοκιμὲς** ὑπολογΐστε τὴν τάξη $\text{ord}_{29}(17)$. **μον. 1**
7. Ἐστω πρῶτος $p \equiv 13 \pmod{20}$. Αποδείξτε οτι $\left(\frac{-5}{p}\right) = -1$. **μον. 1.5**
(Ὑπόδειξη: Ὑπολογΐστε πρῶτα τὶς κλάσεις $p \pmod{5}$ και $p \pmod{4}$.)

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Διάρκεια τῆς ἐξέτασης 2 ὥρες.
- Δὲν ἐπιτρέπεται χρῆση κανενὸς εΐδους ἠλεκτρονικῆς συσκευῆς. Οἱ πράξεις γίνονται ἄνετα μὲ τὸ χέρι.
- Δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ἔχετε πάνω ἢ δίπλα σας, τσάντα, σημειώσεις, βιβλία, κινητὸ (ἔστω και ἀπενεργοποιημένο) ἢ ἄλλη ἠλεκτρονικὴ συσκευὴ ποὺ μπορεΐ νὰ χρησιμοποιηθεΐ γιὰ ἀντιγραφή. Ὅλα τὰ παραπάνω πρέπει νὰ παραδίδονται στὴν ἔδρα ὑποχρεωτικὰ πρὶν τὴν ἔναρξη τῆς ἐξέτασης.