

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
Έαρινό Έξάμηνο 2019
Καθηγητής Ν. Γ. Τζανάκης

Έξεταστική περίοδος Σεπτεμβρίου (6-9-2019)

1. Έστω p, q, r διαφορετικοί μεταξύ τους πρώτοι. Βρείτε τους άκεραίους $x > 1, y > 1$, οι οποίοι είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν τη σχέση $x^2y^3 = p^{12}q^9r^6$, αν είναι επιπλέον γνωστό ότι $v_p(x) \leq 4$. μον. 1.5
2. Αν οι a, b, c είναι θετικοί άκεραίοι, ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι > 1 και $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$, δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ δεν είναι άκεραίος. μον. 1.5
Υπόδειξη: Γράψτε τον αριθμό σαν ένα κλάσμα. Αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα κλάσμα άκεραίος είναι, κάθε πρώτος διαιρέτης του παρονομαστή να διαιρεί και τον αριθμητή.
3. (α') Αν $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ και $a = bc + d$, αποδείξτε ότι $(a, b) = (b, d)$.
(β') Αποδείξτε ότι, για όποιονδήποτε άκεραίο x , οι αριθμοί $x^2 - 2, x + 1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους· μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (α').
(γ') Αποδείξτε ότι, για όποιονδήποτε άκεραίο x , οι αριθμοί $x^4 - x^2 + x - 1, x^2 - 2$ είναι πρώτοι μεταξύ τους· μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα (α') και (β'). μον. 1.5
4. Αποδείξτε ότι, για κάθε πρώτο p της μορφής $p = 24k + 5$, η ισοτιμία $x^2 \equiv -6 \pmod{p}$ έχει λύση. μον. 1.5
5. Αν p είναι περιττός πρώτος, αποδείξτε ότι $\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 0$ (οι προσθετέοι του άθροίσματος είναι σύμβολα Legendre). μον. 1
6. Υπολογίστε όλες τις λύσεις της ισοτιμίας $x^2 \equiv -6 \pmod{29^2}$, που ικανοποιούν τη συνθήκη $0 < x < 29^2 = 841$.
Σημείωση: Τις ισοτιμίες $\pmod{29}$ που θα χρειασθεί να λύσετε, μπορείτε να τις λύσετε με δοκιμές (οι πράξεις είναι άπλες), όχι όμως και την ισοτιμία $\pmod{29^2}$. Λύσεις αρνητικές ή $> 29^2$ θα τις αναγάγετε στο διάστημα $(1, 841)$. μον. 1.5
7. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον διακριτό λογάριθμο inda όλων των $a = 1, 2, \dots, 18$. (Ο γεννήτορας, ως προς τον οποίο έχει υπολογισθεί ο διακριτός λογάριθμος, δεν σ'αξ χρειάζεται.)

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
inda	0	1	13	2	16	14	6	3	8	17	12	15	5	7	11	4	10	9

Υπολογίστε όλες τις διαφορετικές λύσεις της ισοτιμίας $x^{12} \equiv 7 \pmod{19}$ χρησιμοποιώντας αυτόν τον πίνακα. **Λύση με δοκιμές απορρίπτεται!** μον. 1.5

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Διάρκεια της εξέτασης 2 ώρες.
- Δεν επιτρέπεται χρήση κανενός είδους ηλεκτρονικής συσκευής. Οι πράξεις γίνονται άνετα με το χέρι.
- Δεν επιτρέπεται να έχετε πάνω ή δίπλα σας, τσάντα, σημειώσεις, βιβλία, κινητό (έστω και απενεργοποιημένο) ή άλλη ηλεκτρονική συσκευή που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αντιγραφή. Όλα τα παραπάνω πρέπει να παραδίδονται στην έδρα υποχρεωτικά πριν την έναρξη της εξέτασης.