ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2019

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς 1ης ἑβδομάδας

Ὅλα τὰ γράμματα συμβολίζουν ἀκεραίους.
Τὸ σύμβολο (a, b), ὅπου $a, b \in \mathbb{Z}$, συμβολίζει τὸν ΜΚΔ τῶν a, b

Μόνο με τὸν νοῦ σας οἱ ἀριθμητικὲς ἐρωτήσεις, δίχως χαρτί, μολύβι, κομπιουτεράκι, κλπ

1. Εἶναι διαιρετὸς ὁ 7143 διὰ 7;
2. Εἶναι διαιρετὸς ὁ 392613 διὰ 13;
3. Πηλῖκο καὶ ὑπόλοιπο τῆς εὐκλείδειας διαίρεσης τοῦ 18 διὰ 5.
4. Πηλῖκο καὶ ὑπόλοιπο τῆς εὐκλείδειας διαίρεσης τοῦ -18 διὰ 5.
5. Ἔστω ὅτι $b > 0$ καὶ $a = bq - r$, ὅπου $0 < r < b$. Ποιὸ εἶναι τὸ πηλῖκο καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς εὐκλείδειας διαίρεσης τοῦ a διὰ b;
6. Ἂν $a|b$ καὶ $c|d$, εἶναι ἀληθὲς ὅτι $ac|bd$;
7. Ἂν $b|a$, εἶναι ἀληθὲς ὅτι $b^n|a^n$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$;
8. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐλάχιστο θετικὸ στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\{14x + 40y : \ x, y \in \mathbb{Z}\}$;
9. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν κάθε κοινὸς διαιρέτης τῶν a, b εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν m, n, τότε $(a, b)|(m, n)$.
10. Ἂν $(a, b) = 1$ καὶ $m = 5a + 2b$, $n = 3a + b$, ἀποδεῖξτε ὅτι $(m, n) = 1$.
11. Ἂν $(a, b) = 1$, $c|a$ καὶ $d|b$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $(c, d) = 1$.
12. Ἂν $(a, b) = 1$ καὶ $d|a + b$, τότε $(a, d) = (b, d) = 1$.
13. Ἂν $ax + by = 1$, ἀποδεῖξτε ὅτι $(a, b) = 1$.
14. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀκέραιος $a > 1$ γιὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει $(2a, a + 6) = a$;
15. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἰσχύει $(m + kn, n) = (m, n)$, ὁποιοιδήποτε κι ἂν εἶναι οἱ m, n, k.
16. Ἀποδεῖξτε ὅτι $(3n + 1, 10n + 3) = 1$, ὁποιοσδήποτε κι ἂν εἶναι ὁ n.
17. Μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ εὐκλειδείου ἀλγορίθμου, *ἀποκλειστικά*, ὑπολογῖστε τοὺς ΜΚΔ:

$$(5967, 936), \quad (5371, 707), \quad (17671, 3731).$$

Οἱ ΜΚΔ εἶναι, ἀντιστοίχως: 117, 1, 41.