ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2019

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς 12ης ἑβδομάδας

1. Ἔστω $m = p^n$ ἢ $2p^n$, ὅπου p περιττὸς πρῶτος καὶ $n \geq 1$. Ἂν a, b εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν m, ἀποδεῖξτε ὅτι $\mathrm{ind}(ab) = \mathrm{ind}(a) + \mathrm{ind}(b) + \delta m$ ὅπου $\delta \in \{0, -1\}$.

2. (α′) Ἂν ὁ $p = 3k+2$ εἶναι πρῶτος, ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε ἀκέραιος a εἶναι κυβικὸ ἰσοϋπόλοιπο $\pmod{p}$.
(β′) Ἂν ὁ $p = 3k+1$ εἶναι πρῶτος, ἀποδεῖξτε ὅτι σὲ κάθε περιορισμένο σύστημα ὑπολοίπων $\pmod{p}$ ἀκριβῶς $(p-1)/3$ ἀριθμοὶ εἶναι κυβικὰ ἰσοϋπόλοιπα $\pmod{p}$.
Ὑπόδειξη καὶ γιὰ τὰ δύο ἐρωτήματα. Ἐφαρμόστε τὸ Θεώρημα 5.2.2. τῶν Σημειώσεων.

3. Ὑπολογῖστε ὅλες τὶς διαφορετικὲς $\pmod{p-1}$ λύσεις τῶν ἐκθετικῶν ἰσοτιμιῶν $a^x \equiv b \pmod{p}$ στὶς παρακάτω περιπτώσεις (κάποιες ἀπὸ αὐτὲς εἶναι ἀδύνατες). Θὰ χρειαστεῖ νὰ κάνετε χρήση τοῦ Πίνακα 5.2 τῶν Σημειώσεων.
$$(p, a, b) = (37, 11, 14),\ (37, 11, 26),\ (53, 30, 23),\ (53, 11, 14)$$

4. Ὑπολογῖστε ὅλες τὶς διαφορετικὲς $\pmod{p}$ λύσεις τῶν διωνυμικῶν ἰσοτιμιῶν $x^n \equiv a \pmod{p}$ στὶς παρακάτω περιπτώσεις (κάποιες ἀπὸ αὐτὲς εἶναι ἀδύνατες). Θὰ χρειαστεῖ νὰ κάνετε χρήση τοῦ Πίνακα 5.2 τῶν Σημειώσεων.
$$(p, n, a) = (31, 9, 15),\ (31, 15, 9),\ (37, 11, 14),\ (37, 14, 11),$$

Ασκησεις Επαναληψης

1. Ἂν οἱ a, b εἶναι περιττοί, πρῶτοι μεταξύ τους, ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ $a^2 + b^2$ περιττὸς ἀλλὰ ὄχι διαιρετὸς ἀπὸ τὸ 4.

2. Ἂν $(a, b) = 1$, ἀποδεῖξτε ὅτι $(a^2 + b^2, a + b) = 1$.
Ὑπόδειξη. Διακρίνετε δύο περιπτώσεις: (α′) Οἱ a, b εἶναι καὶ οἱ δύο περιττοί. (β′) Ἕνας ἐκ τῶν a, b εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ ἄλλος περιττός. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ἀποδεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει περιττὸς πρῶτος κοινὸς διαιρέτης τῶν a, b. Ἐπιπλέον, στὴν περίπτωση (α′) ἐφαρμόστε καὶ τὴν προηγούμενη ἄσκηση, ἐνῶ στὴν περίπτωση (β′) παρατηρῆστε ὅτι οἱ $a^2 + b^2, a + b$ εἶναι περιττοί.

3. Προσδιορῖστε ὅλους τοὺς ἀκεραίους $a \neq 3$ γιὰ τοὺς ὁποίους ἰσχύει $a - 3 \mid a^3 - 3$.
Ὑπόδειξη. Θέσετε $a - 3 = b$ καὶ προσδιορῖστε ὅλους τοὺς $b \neq 0$ γιὰ τοὺς ὁποίους ἰσχύει $b \mid (b+3)^3 - 3$.

4. Ἂν $(a, b) = 1$, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ κλάσμα $(3a + 5b)/(8a + 13b)$ εἶναι ἀνάγωγο.

5. Ἀποδεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ n ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:
$$(\alpha')\ 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}, \quad (\beta')\ 16 \mid 3^{4n+1} - 2 \cdot 3^{2n} - 1, \quad (\gamma')\ 169 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27.$$

Ὑποδείξεις: (α′) Ἡ ἀποδεικτέα εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴ σχέση $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 \pmod{7}$. Παρατηρῆστε ὅτι $3^{2n+1} \equiv 3 \cdot 2^n \pmod{7}$. (β′) Ἡ ἀποδεικτέα εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴ σχέση $3^{4n+1} - 2 \cdot 3^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$. Παρατηρῆστε ὅτι $\mathrm{ord}_{16}(9) = 2$, ἄρα $n \equiv 1$ ἢ $9 \pmod{16}$. (γ′) Γρᾶψτε $3^{3n+3} = 27^{n+1} = (1 + 26)^{n+1} = \ldots$. Ἀναπτῦξτε τὸ διώνυμο καὶ παρατηρῆστε ὅτι ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος, ἀπὸ τὸν τρίτο καὶ μετά, διαιροῦνται ἀπὸ τὸ 169.