ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2019

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $2^{ης}$ ἑβδομάδας

Ὅλα τὰ γράμματα συμβολίζουν ἀκεραίους.
Τὰ (a, b), $[a, b]$, ὅπου $a, b \in \mathbb{Z}$, συμβολίζουν, ἀντιστοίχως, ΜΚΔ καὶ Ε.Κ.Π. τῶν a, b.

1. Λῦστε τὶς ἀσκήσεις 1 καὶ 2 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.

2. Λῦστε τὴν ἄσκηση 3 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη: Ἔχομε ὅτι $d \mid k(ax + by) + \ell(a'x + b'y)$ γιὰ κάθε k, ℓ. Ἐφαρμόστε αὐτὸ γιὰ δύο κατάλληλα ζευγάρια k, ℓ.

3. Λῦστε τὴν ἄσκηση 4 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη: Δεῖξτε ὅτι $d \in \Delta \Leftrightarrow \frac{n}{d} \in \Delta$ καὶ ἡ ἀντιστοιχία $n \mapsto \frac{n}{d}$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

4. Λῦστε μία τουλάχιστον ἀπὸ τὶς ἀσκήσεις 5,6,7 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη: Γιὰ παράδειγμα, στὴν ἄσκηση 5, ἔστω ὅτι a εἶναι περιττὸς ἀκέραιος. Ἂν $a = 8q + r$ μὲ r τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ a διὰ 8, ποιὲς εἶναι οἱ πιθανὲς τιμὲς τοῦ r; Γιὰ κάθε μία ἀπὸ αὐτὲς ὑπολογῖστε τὸ a^2 καὶ ἀπὸ αὐτὸ θὰ φανεῖ εὔκολα ποιὸ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ a^2 διὰ 8. Ἀνάλογα καὶ γιὰ τὶς ἀσκήσεις 6 και 7.

5. Λῦστε τὴν ἄσκηση 8 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.

6. Λῦστε τὴν ἄσκηση 9 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη: (α΄) Ἔστω $(a+b, a-b) = d > 1$. Τότε ὑπάρχει πρῶτος $p \mid d$. Πρῶτα ἀποκλεῖστε τὴν περίπτωση νὰ εἶναι ἄρτιος ὁ d, ἄρα ὁ p εἶναι περιττὸς πρῶτος. Μετά, ἀπὸ τὶς σχέσεις $p \mid a+b$ καὶ $p \mid a-b$ συμπεράνατε ὅτι $p \mid 2a$ καὶ $p \mid 2b$. Θυμηθεῖτε: Ὅταν ἕνας πρῶτος διαιρεῖ ἕνα γινόμενο, τότε...;
   (β΄) Ἂν θέσετε $a = 2c + 1, b = 2d + 1$, φαίνεται εὔκολα ὅτι ἕνας ἀπὸ τοὺς $(a + b)/2, (a - b)/2$ εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ ἄλλος περιττός . Μετὰ κάνετε ἕνα συλλογισμὸ παρόμοιο μὲ αὐτὸν τῆς ὑπόδειξης γιὰ τὸ (α΄).

7. Λῦστε τὴν ἄσκηση 10 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη: Γιὰ τὸ πρῶτο ἐρώτημα, παρατηρῆστε ὅτι $na = mb$, ἄρα $n \mid mb$. Ὅμως $(n, m) = 1$, ἄρα ....
   Γιὰ τὸ δεύτερο ἐρώτημα, παρατηρῆστε ὅτι κάθε κλάσμα ἰσοῦται μὲ ἕνα ἀνάγωγο κλάσμα. Ἔτσι, γιὰ κάποιο ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{m}{n}$ ἔχομε $\frac{a_1}{b_1} = \frac{m}{n} = \frac{a_2}{b_2}$. Ἐφαρμόστε τώρα τὸ πρῶτο ἐρώτημα.

8. Λῦστε τὴν ἄσκηση 11 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη: Ἐφαρμόστε κατάλληλα τὸ Θεώρημα 1.2.2 (ζ΄).

9. Λῦστε τὴν ἄσκηση 12 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη: Ἔστω $(a, b) = d, a = da_1, b = db_1$. Ἐκφρᾶστε τοὺς $a + b$ καὶ $[a, b]$ συναρτήσει τῶν d, a_1, b_1 καὶ μετὰ δεῖξτε ὅτι $(a + b, [a, b]) = d$.

10. Λῦστε τὴν ἄσκηση 13 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
Ὑπόδειξη: Ἔστω $q \in \mathbb{Q}, n \geq 2$ καὶ $q^n = c$ μὲ c μὴ μηδενικὸ ἀκέραιο. Ἔστω $q = \frac{a}{b}$ μὲ τὸ κλάσμα στὸ δεξιὸ μέλος ἀνάγωγο. Ἂν ὁ q δὲν εἶναι ἀκέραιος, τότε ὑπάρχει πρῶτος p ποὺ διαρεῖ τὸν b. Ἐξ ὑποθέσεως, $a^n = cb^n$, ἄρα $p \mid a^n$ (γιατί;). Ἀπὸ αὐτὸ ὁδηγούμαστε στὸ συμπέρασμα ὅτι $p \mid a$ (γιατί;). Γιατὶ αὐτὸ εἶναι ἄτοπο;

11. Λῦστε τὴν ἄσκηση 14 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
Ὑπόδειξη: Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ὅτι $\frac{k}{\ell}$ εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου, συμπεράνατε ὅτι $a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1}\ell + \cdots + a_1 k\ell^{n-1} = -a_0\ell^n$. Ἀπὸ τὴ σχέση αὐτὴ αἰτιολογῆστε διαδοχικῶς τὰ ἑξῆς: (α′) $k \mid a_0\ell^n$. (β′) $k \mid a_0$. Ὕστερα γρᾶψτε τὴν παραπάνω σχέση μὲ τὴ μορφὴ $a_n k^n = -a_{n-1}k^{n-1}\ell - \cdots - a_1 k\ell^{n-1} - a_0\ell^n$ καί, κάνοντας ἀνάλογους συλλογισμούς, ὁδηγηθεῖτε στὸ συμπέρασμα ὅτι $\ell \mid a_n$.

12. Λῦστε τὶς ἀσκήσεις 24 καὶ 25 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.
Γενικὴ συμβουλή: Ὅταν ἔχετε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $ax + by = c$ καὶ ζητᾶτε ἀκέραιες λύσεις, πάντοτε θὰ ξεκινᾶτε ἀπὸ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ $d = (a, b)$. Ἂν $d \nmid c$, εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχει ἀκέραιες λύσεις ἡ ἐξίσωση; Ἂν $d \mid c$, ἔστω $c = dc_1$, γιατὶ μπορεῖτε νὰ βρεῖτε ἀκέραια λύση τῆς ἐξίσωσης $ax + by = c_1$; Καὶ τότε, δεῖτε ὅτι μπορεῖτε νὰ βρεῖτε ἀμέσως καὶ ἀκέραια λύση τῆς $ax + by = c$.