ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2019

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $3^{ης}$ ἑβδομάδας

Ὅταν μιλᾶμε γιὰ «λύσεις Διοφαντικῆς ἐξίσωσης» πάντοτε ἐννοοῦμε ἀκέραιες λύσεις

1. Λῦστε τὶς ἀσκήσεις 28, 29 καὶ 30 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.

2. (α′) Γιατὶ ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωση $2255x + 3485y = 50$ δὲν ἔχει λύσεις;
   (β′) Γιατὶ ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωση $1806x + 1038y = 30$ ἔχει λύσεις; Ποιὸς τῦπος μᾶς παρέχει ὅλες τὶς λύσεις τῆς συγκεκριμένης ἐξίσωσης; Βρεῖτε ὅλες τὶς λύσεις (x, y) μὲ $-3000 \leq x \leq 2000$.

3. Λῦστε τὴ Διοφαντικὴ ἐξίσωση $x^2 + 3^5 5^3 = y^2$ σὲ θετικοὺς ἀκέραιους x, y πρώτους μεταξύ τους.
   Ὑπόδειξη: Παρατηρῆστε ὅτι οἱ $y + x, y - x$ εἶναι θετικοί, πρῶτοι μεταξύ τους καὶ τὸ γινόμενό τους εἶναι γνωστό. Τί συμπεραίνετε γιὰ τὶς ἀναλύσεις τους σὲ πρώτους παράγοντες;

4. Ἔστω ὅτι x, y εἶναι περιττοί.
   (α′) Δεῖξτε ὅτι $8 \mid (y^2 - x^2)$.
   (β′) Ἂν $v_2(y^2 - x^2) = n$ (ἄρα, ἀπὸ τὸ (α′), $n \geq 3$), δεῖξτε ὅτι, ἢ $v_2(y + x) = 1$ καὶ $v_2(y - x) = n - 1$, ἢ $v_2(y - x) = 1$ καὶ $v_2(y + x) = n - 1$.
   Ὑπόδειξη. Δεῖξτε ὅτι οἱ $y + x, y - x$ εἶναι καὶ οἱ δύο ἄρτιοι, ἀλλὰ τὸ 4 δὲν διαιρεῖ συγχρόνως καὶ τοὺς δύο. Ἄρα, γιὰ ἕναν ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς $y + x, y - x$, ἡ μέγιστη δύναμη τοῦ 2 ποὺ τὸν διαιρεῖ εἶναι 2^1. Τώρα ἡ ἀπόδειξη τοῦ ἰσχυρισμοῦ εἶναι πολὺ ἁπλῆ.
   (γ′) Λῦστε τὴ Διοφαντικὴ ἐξίσωση $x^2 + 2^4 3^5 5^3 = y^2$ σὲ θετικοὺς ἀκέραιους x, y πρώτους μεταξύ τους.
   Ὑπόδειξη: Δεῖξτε ὅτι οἱ $y + x, y - x$ δὲν ἔχουν κοινὸ πρῶτο διαιρέτη > 2. Ἀπ' τὴν ἄλλη, ὅπως εἴπαμε καὶ στὴν ὑπόδειξη τοὺ (β′), οἱ $y + x, y - x$ εἶναι ἄρτιοι, ἀλλὰ τὸ 4 δὲν διαιρεῖ συγχρόνως καὶ τοὺς δύο. Ἄρα $(y + x, y - x) = 2$. Τώρα ἡ ἐξίσωσή μας γράφεται $\frac{y+x}{2} \cdot \frac{y-x}{2} = 2^2 3^5 5^3$ καὶ οἱ δύο παράγοντες στὸ ἀριστερὸ μέλος εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους. Τί συμπεραίνετε τώρα γιὰ τὴν ἀνάλυσή τους σὲ πρώτους παράγοντες;

5. Λῦστε τὴν ἄσκηση 34 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων.

Σὲ ὅσους ἀγαποῦν τὶς μαθηματικὲς προκλήσεις προτείνω τὶς ἀσκήσεις 32, 33 καὶ 35 τῆς ἑνότητας 1.6 τῶν Σημειώσεων. (Ἡ ἄσκηση 32 (α′) δὲν εἶναι πραγματικὴ πρόκληση, ἀλλὰ χρησιμεύει γιὰ τὴ λύση τῆς 32 (β′) καί, γενικά, εἶναι ἕνα χρήσιμο ἐργαλεῖο.)