ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐαρινὸ Ἑξάμηνο 2019

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $4^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδας

Στὶς παρακάτω ἀσκήσεις ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀκέραιοι

1. (α′) Λῦστε τὴν ἄσκηση 1 τῆς ἑνότητας 2.5 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη. Δεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε περιττὸ ἀριθμὸ a ἰσχύει $a \equiv 1$ ἢ $3 \pmod 4$ καὶ $a \equiv 1$ ἢ 3 ἢ 5 ἢ $7 \pmod 8$. Μετὰ δεῖξτε ὅτι $a \equiv \pm 1 \pmod 4$ καὶ $a \equiv \pm 1$ ἢ $\pm 3 \pmod 8$.
   (β′) Ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς: Ἂν οἱ a, b εἶναι περιττοί, τότε ὁ $a^2 + b^2$ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι τέλειο τετράγωνο (δηλαδή, τετράγωνο ἀκεραίου).
   Ὑπόδειξη. Ἔστω $a^2 + b^2 = c^2$. Παρατηρῆστε ὅτι ὁ c εἶναι ἄρτιος. Παρατηρῆστε, ἐπίσης, ὅτι ἡ ἰσότητα συνεπάγεται τὴν ἰσοτιμία $a^2 + b^2 \equiv c^2 \pmod 4$. Μετά, βρεῖτε: $c^2 \equiv \ldots \pmod 4$ καί, μὲ χρήση το῀ (α′), $a^2 + b^2 \equiv \ldots \pmod 4$ καὶ θὰ ὁδηγηθῆτε σὲ ἀντίφαση.
   (γ′) Κάνοντας χρήση τοῦ (α′) ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς: Ἂν οἱ a, b εἶναι περιττοί, τότε ὁ $a^4 - b^2$ εἶναι διαιρετὸς ἀπὸ τὸ 8.
   Ὑπόδειξη. Σύμφωνα μὲ τὴν ὑπόδειξη τοῦ ἐρωτήματος (α′), $b \equiv \pm 1 \pmod 4$. Κάνοντας χρήση τοῦ (α′) δεῖξτε ὅτι οἱ $a^2 + b, a^2 - b$ εἶναι ἄρτιοι καὶ ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο (ὄχι, κατ' ἀνάγκη ὁ πρῶτος) εἶναι διαιρετὸς ἀπὸ τὸ 4.

2. Ἔστω ὅτι $a_1, a_2, \ldots$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ μεταξὺ 30 καὶ 43, ποὺ εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸ 14. Γιὰ κάθε τέτοιον a_i ὑπολογῖστε τὸν b_i, γιὰ τὸν ὁποῖο $13a_i \equiv b_i \pmod{14}$ καὶ $30 \le b_i \le 43$. Τί παρατηρεῖτε στὶς γραμμὲς τοῦ πίνακα $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ b_1 & b_2 & \ldots \end{pmatrix}$; Πῶς ἐξηγεῖται αὐτό;

3. Βρεῖτε τὸ περιορισμένο σύστημα ὑπολοίπων mod 60 τοῦ ὁποίου οἱ ἀριθμοὶ περιέχονται μεταξὺ 138 καὶ 198.

4. Λῦστε τὴν ἄσκηση 3 τῆς ἑνότητας 2.5 τῶν Σημειώσεων.
   Ὑπόδειξη. Κατ' ἀρχάς, παρατηρῆστε ὅτι, κάνοντας χρήση τῆς ἀσκήσεως 1 (α′), ἀποκλείεται νὰ εἶναι καὶ οἱ δύο x, y περιττοί, ἐπειδὴ ἡ ἰσοτιμία $x^2 + 3y^2 \equiv z^4 \pmod 4$ εἶναι ἀδύνατη (βλέπετε γιατί;). Ἄρα, ἀπὸ τοὺς x, y, ὁ ἕνας εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ ἄλλος περιττός. Ἀποκλεῖστε τὴν περίπτωση νὰ εἶναι ὁ x ἄρτιος καὶ ὁ y περιττός, μὲ ἀνάλογο τρόπο. Ἄρα, μένει ἡ περίπτωση y ἄρτιος καὶ x περιττός. Κάνοντας χρήση τῆς ἀσκήσεως 1 (γ′) δεῖξτε ὅτι $3y^2 \equiv 0 \pmod 8$, ἄρα ....

5. Λῦστε τὶς ἀσκήσεις 4,5,6 τῆς ἑνότητας 2.5 τῶν Σημειώσεων.

6. Λῦστε τὴν ἄσκηση 8 τῆς ἑνότητας 2.5 τῶν Σημειώσεων.