ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΗ 1-ΔΙΑΣΤΑΣΗ

2.1 Συντηρητικές δυνάμεις

Έστω σώμα (με την έννοια του σωματιδίου) κινούμενο επί ευθείας γραμμής την οποία ταυτίζουμε με τον άξονα–x, υπό την επίδραση της δύναμης F(x). Τότε η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι,

$$m\ddot{x} = F(x)\,. \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί $\dot{x}$ και ολοκληρώνοντας ως προς t φθάνουμε στη σχέση

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = \int F(x)\dot{x}dt = \int F(x)dx = -\int \frac{dV}{dx}dx = -V(x) + \text{const.} \quad (2)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον ορισμό της **δυναμικής ενέργειας** του σώματος ,

$$V(x) - V(x_o) = -\int_{x_o}^{x} F(x)dx \qquad (3)$$

και x_o είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Το πρώτο μέρος της (2) είναι η **κινητική ενέργεια** του σώματος,

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2\,, \qquad (4)$$

οπότε φθάνουμε από την (2) στο **νόμο διατήρησης της ενέργειας**,

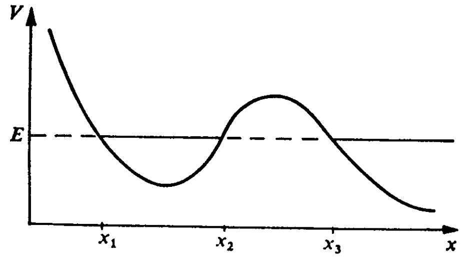
$$E = T + V = \text{σταθερά.} \qquad (5)$$

Η δύναμη λοιπόν η οποία εξαρτάται μόνο από το x λέγεται **συντηρητική**, και το κοινό χαρακτηριστικό των δυνάμεων αυτών είναι η διατήρηση της ενέργειας (του σώματος). Από τον νόμο διατήρησης (5) μπορούμε να πάρουμε χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με την κίνηση του σώματος, χωρίς να χρειαστεί να ολοκληρώσουμε την εξίσωση κίνησής του. Πράγματι, η εξίσωση (5) γράφεται,

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \qquad (6)$$

και επειδή το πρώτο μέρος της (6) είναι θετικό, θα πρέπει να ισχύει: $E \geq V(x)$. Έστω ότι η συνάρτηση V(x) έχει την μορφή του Σχήματος 1, που συνεπάγεται ότι η κίνηση του σώματος περι-

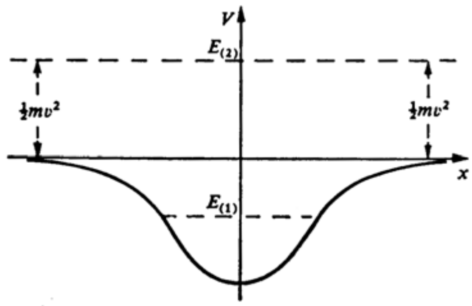
Σχήμα 1 Συνάρτηση δυναμικού



ορίζεται στα διαστήματα $x_1 \leq x \leq x_2$ και $x \geq x_3$ όπου T>0. Η ταχύτητα μηδενίζεται στα σημεία x_1, x_2 και x_3 (που λέγονται και **σημεία καμπής**), όπου V(x)=E. Έτσι, αν το σωματίδιο ξεκινήσει από την ηρεμία στο σημείο x_1, θα κινηθεί προς τα δεξιά αρχικά με αυξανόμενη ταχύτητα και στη συνέχεια με ελαττούμενη ταχύτητα μέχρι να φθάσει στο σημείο x_2, όπου ηρεμεί προς στιγμήν και μετά αντιστρέφεται η κίνησή του, δηλ. το σώμα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων (x_1, x_2). Αν όμως αρχικά το σώμα ξεκινά από το σημείο x_3, τότε θα κινηθεί προς το $+\infty$ με αυξανόμενη ταχύτητα, μέχρι ότου διαφύγει έξω από το πεδίο δυναμικού, όπου $V(x)=0$.

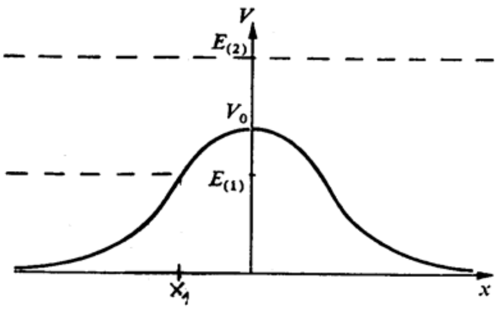
Ας θεωρήσουμε ένα πιο συγκεκριμένο δυναμικό όπως το **πηγάδι δυναμικού** του Σχήματος 2.

Σχήμα 2 Πηγάδι δυναμικού



Αν η ολική ενέργεια $E=E_1<0$, τότε το σωματίδιο (όπως και στη προηγούμενη συζήτηση) περιορίζεται μέσα σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου και ταλαντούται μεταξύ των σημείων όπου $V(x)=E$. Αν όμως η ενέργεια του σωματιδίου είναι $E=E_2>0$, τότε αν αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται έξω από το πεδίο έλξης (όπου $V(x)=0$) το σωματίδιο εισέρχεται στη περιοχή του πεδίου επιταχυνόμενο μέχρι του σημείου $x=0$ (το κέντρο του πεδίου έλξης), στη συνέχεια επιβραδύνεται και εξέρχεται από το πεδίο με ταχύτητα τελικά ίση με την αρχική. Η κίνηση αυτή είναι **απεριοδική**. Το αντίθετο συμβαίνει στο **φράγμα δυναμικού** του Σχήματος 3. Το δυναμικού αυτό

Σχήμα 3 Φράγμα δυναμικού



αντιστοιχεί σε απωστική δύναμη. Εδώ είναι δυνατά δύο είδη κίνησης. Αν αρχικά το σωματίδιο ξεκινήσει από τα αριστερά με ενέργεια $E=E_1$, τότε επιβραδύνεται μέχρι του σημείου x_1, όπου $E=V(x)$. Στο σημείο x_1 αντιστρέφεται η κίνησή του και ξεφεύγει τελικά στο $-\infty$. Το ίδιο συμβαίνει και από την δεξιά πλευρά του φράγματος. Αν όμως $E=E_2$, τότε το σωματίδιο επιβραδύνεται μέχρι να φθάσει στο κέντρο του πεδίου άπωσης (σημείο $x=0$) και στη συνέχεια (χωρίς να σταματήσει) επιταχύνεται και ξεφεύγει στο $+\infty$ με τελική ταχύτητα ίση με την αρχική, ως να μην είχε συναντήσει το πεδίο δυναμικού.

2.2 Κίνηση κοντά στη θέση ισορροπίας

Για να ισορροπεί ένα σώμα θα πρέπει η δύναμη που ασκείται σ' αυτό να ισούται με μηδέν ή $F = -\frac{dV}{dx} = 0$, που σημαίνει ότι η εφαπτόμενη της δυναμικής ενέργειας στη θέση ισορροπίας να είναι οριζόντια. Χωρίς να χάνεται η γενικότητα, διαλέγουμε στο σημείο ισορροπίας ως x=0. Για μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας μπορούμε να αναπτύξουμε τη δυναμική ενέργεια σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο ισορροπίας x=0,

$$V(x) = V(0) + xV'(0) + \tfrac{1}{2}x^2V''(0) + \ldots \qquad (7)$$

Θέτουμε V(0)=0 (στάθμη αναφοράς) και εφόσον στο σημείο ισορροπίας F=-V′(0)=0, καταλήγουμε από την (7) στη προσέγγιση,

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (8)$$

όπου k= V′ ′ (0). (Η προσέγγιση (8) έχει την ίδια μορφή με την δυναμική ενέργεια του **αρμονικού ταλαντωτή**, π.χ. μια μάζα m προσδεδεμένη στο άκρο ενός ελατηρίου). Οπότε από την (8) υπολογίζουμε τη δύναμη

$$F = -\,kx, \qquad (9)$$

και επομένως, η εξίσωση κίνησης του σώματος ($2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα) γράφεται,

$$m\ddot{x} + kx = 0\,. \qquad (10)$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση και οι λύσεις της ακολουθούν την αρχή της επαλληλίας, δηλ. αν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι λύσεις της (10), τότε και ο γραμμικός συνδυασμός

$$x(t) = \alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t) \qquad (11)$$

(όπου α και β σταθερές) είναι λύση της (10). Πράγματι, αντικαθιστώντας την (11) στην (10) παίρνουμε

$$m\ddot{x} + kx = \alpha(m\ddot{x}_1 + kx_1) + \beta(m\ddot{x}_2 + kx_2) = 0\,.$$

Αν οι λύσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε η λύση (11) είναι η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης (10). Ας βρούμε λοιπόν τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (10).

(i) Αν k<0, τότε V(x)=max στο σημείο ισορροπίας x=0. Η εξίσωση κίνησης (10) έχει τη μορφή,

$$\ddot{x} - p^2x = 0\,, \qquad (12)$$

όπου p^2=-k/m και $p\in\Re$. Οι λύσεις της (12) είναι $x=e^{pt}$ και e^{-pt}, άρα η γενική λύση είναι

$$x(t) = A\,e^{pt} + B\,e^{-pt}. \qquad (13)$$

όπου A,B αυθαίρετες σταθερές. Η λύση (13) είναι ασταθής. Πράγματι, για $t\to\infty$, ο πρώτος όρος στο 2ο μέρος της (13) αποκλίνει, που σημαίνει ότι μια μικρή απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, οδηγεί το σώμα να απομακρύνεται εκθετικά με το χρόνο από το αρχικό σημείο ισορροπίας (σημείο **ασταθούς ισορροπίας**) και κατά συνέπεια η προσέγγιση (7) παύει να ισχύει.

(ii) Αν k>0, τότε V(x)=min στο σημείο ισορροπίας x=0. Η εξίσωση (10) παίρνει τη μορφή,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \qquad (14)$$

όπου ω^2=k/m και $\omega\in\Re$. Οι λύσεις της (14) είναι προφανώς οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις x=cosωt και sinωt, άρα η γενική λύση έχει τη μορφή,

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (15)$$

όπου A,B αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες για x_o, v_o. Η λύση (15) μπορεί να τεθεί και υπό τη μορφή,

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (16)$$

όπου τώρα (A, φ) είναι οι νέες αυθαίρετες σταθερές. Η λύση (16) παριστάνει αρμονική ταλάντωση. Η σταθερά A καλείται **πλάτος** της ταλάντωσης, η σταθερά φ αρχική φάση, και η σταθερά ω συνήθως αναφέρεται ως **γωνιακή "συχνότης"** ταλάντωσης. Να υπενθυμήσω ότι ως **κυκλική** (ή απλά) **συχνότης** ν ορίζεται από τη σχέση: $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$, ενώ η **περίοδος** ταλάντωσης T ορίζεται ως: T=1/ν.

2.4 Αποσβενυμένη ταλάντωση

Είδαμε ότι ένα σώμα που υφίσταται την επίδραση συντηρητικής δύναμης, μπορεί για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας του να θεωρηθεί προσεγγιστικά σαν ένας αρμονικός ταλαντωτής. Όμως σε όλα τα φυσικά συστήματα επενεργεί και κάποια δύναμη τριβής (λέγονται και δυνάμεις ασωτείας) που οδηγεί σε απώλεια της ενέργειας. Σαν καλή προσέγγιση στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας $\dot{x}$, εφόσον μάλιστα αυτή είναι και η μόνη περίπτωση τριβών για την οποίαν μπορούμε να επιλύσουμε την εξίσωση κίνησης αναλυτικά. Συνεπώς, η εξίσωση (10) γράφεται τώρα,

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}\,. \qquad (17)$$

όπου b είναι μια σταθερά (υποθέτουμε b>0). Η εξίσωση (17) περιγράφει τον αποσβυνόμενο αρμονικό ταλαντωτή. Για την επίλυσή της (ως ομογενής) δοκιμάζουμε εκθετικές λύσεις της μορφής

$$x(t) = A\, e^{pt},$$

οπότε $\dot{x} = Ap\, e^{pt}$, και $\ddot{x} = Ap^2\, e^{pt}$. Αντικαθιστώντας στην (17) έχουμε,

$$A\,(mp^2 + bp + k)\, e^{pt} = 0,$$

ή

$$mp^2 + bp + k = 0. \qquad (18)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι

$$p_1 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{(\frac{b}{2m})^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad p_2 = -\frac{b}{2m} - \sqrt{(\frac{b}{2m})^2 - \frac{k}{m}} \qquad (19)$$

ή θέτοντας $\omega_o^2 = k/m$ και $\gamma = b/2m$ (ω_o λέγεται **ιδιοσυχνότητα** του αρμονικού ταλαντωτή), οι ρίζες (19) γράφονται,

$$p_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \quad \text{και} \quad p_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \qquad (20)$$

(a) για μεγάλη απόσβεση $\gamma^2 > \omega_o^2$ έχουμε $p_1, p_2 \in \Re$, ενώ η τετραγωνική ρίζα στις (20) γράφεται:

$\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} = \gamma\sqrt{1 - \frac{\omega_o^2}{\gamma^2}} \cong \gamma(1 - \frac{\omega_o^2}{2\gamma^2}) = \gamma - \frac{\omega_o^2}{2\gamma}$, οπότε

$$p_1 = -\frac{\omega_o^2}{2\gamma} \quad \text{και} \quad p_2 = -2\gamma + \frac{\omega_o^2}{2\gamma}. \qquad (21)$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (17) είναι

$$x(t) = Ae^{-\frac{\omega_o^2}{2\gamma}t} + Be^{-2\gamma t + \frac{\omega_o^2}{2\gamma}t} \qquad (22)$$

Για $t \to \infty$, και οι δύο όροι στην (22) τείνουν εκθετικά προς το μηδέν.

(b) για μικρή απόσβεση $\gamma^2 < \omega_o^2$, οι ρίζες (20) p_1, p_2 είναι μιγαδικές, δηλ.

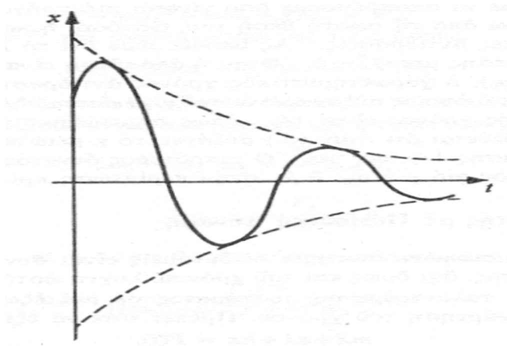
$$p_1 = -\gamma + i\omega \quad \text{και} \quad p_2 = -\gamma - i\omega \qquad (23)$$

όπου $\omega^2 = \omega_o^2 - \gamma^2$. Οπότε η γενική λύση της (17) είναι,

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t+i\omega t} + B\, e^{-\gamma t-i\omega t}$$
$$= \alpha\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t+\varphi) \qquad (24)$$

Η λύση (24) παριστάνει ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$ και με πλάτος ταλάντωσης $\alpha e^{-\gamma t}$ το οποίο μειώνεται εκθετικά με το χρόνο (Σχήμα 4). Ο χρόνος τ=1/γ λέγεται χρόνος εφησυχασμού και παριστάνει τον χρόνο που απαιτείται για να μειωθεί το πλάτος στην 1/e της αρχικής του τιμής. Μέσα σε μια περίοδο το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται κατά: $e^{-\gamma T} = e^{-\gamma\, 2\pi/\omega} \cong e^{-\pi/Q}$. Η ποσότης $Q = \omega_o/2\gamma$ καλείται **συντελεστής ποιότητος**.

Σχήμα 4 Αρμονική ταλάντωση με μικρή απόσβεση

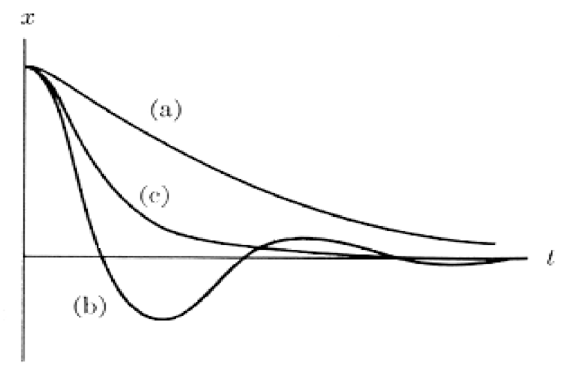


Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή στη περίπτωση της μικρής απόσβεσης είναι (παίρνουμε $\omega \cong \omega_o$),

$$E = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} kx^2$$
$$\cong \tfrac{1}{2} m\alpha^2[-\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega_o t + \phi) - \omega_o e^{-\gamma t}\sin(\omega_o t + \phi)]^2 + \tfrac{1}{2} k[\alpha e^{-\gamma t}\cos(\omega_o t + \phi)]^2$$
$$\cong \tfrac{1}{2} m\alpha^2\omega_o^2 e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega_o t + \phi) + \tfrac{1}{2} k\alpha^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_o t + \phi) \cong \tfrac{1}{2} k\alpha^2 e^{-2\gamma t} = E_o e^{-2\gamma t} \qquad (25)$$

δηλ. η ολική ενέργεια μειώνεται εκθετικά στο διπλάσιο ρυθμό απ' ότι το πλάτος ταλάντωσης, όπου $E_o = \tfrac{1}{2} k\alpha^2$ (στη τελευταία ισότητα στην (25) χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $m\omega_o^2 = k$).

Σχήμα 5 Αρμονική ταλάντωση (α) με μεγάλη απόσβεση, (b) με μικρή απόσβεση, και (c) με κρίσιμη απόσβεση.



(c) για την οριακή τιμή $\gamma=\omega_o$ (κρίσιμη απόσβεση), οι ρίζες (20) είναι ίσες, δηλ. $p_1=p_2=-\gamma$, οπότε η γενική λύση της (17) θα έχει τη μορφή,

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t} + B\, t\, e^{-\gamma t} = (A+Bt)\, e^{-\gamma t} \qquad (26)$$

η οποία και πάλι τείνει εκθετικά προς το μηδέν για $t\to\infty$, αλλά σε πιο γρήγορο ρυθμό απ'ότι της περίπτωσης (a). Στο Σχήμα 5 φαίνεται παραστατικά η επιστροφή στην ηρεμία ενός αρμονικού ταλαντωτή στις τρεις περιπτώσεις απόσβεσης που έχουμε μελετήσει παραπάνω.

2.5 Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Συχνά ενδιαφέρει να διερευνήσουμε την ανταπόκριση ενός ταλαντούμενου συστήματος σε μια χρονο-εξαρτώμενη εξωτερική δύναμη (ή διεγέρτης) F(t). Η εξίσωση κίνησης γράφεται τώρα,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)\,. \qquad (27)$$

Όπως γνωρίζουμε, αν $x_i(t)$ είναι μια λύση της μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (27) και $x_h(t)$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, τότε και το άθροισμά τους $x_i(t)+x_h(t)$ θα είναι επίσης λύση της μη-ομογενούς (27). Επομένως χρειάζεται να βρούμε μια **ειδική** (ή **μερική**) λύση της (27) $x_i(t)$, οπότε ως γενική λύση θα πάρουμε το άθροισμα $x_i(t)+x_h(t)$ (αφού η λύση $x_h(t)$ έχει ήδη βρεθεί στο προηγούμενο εδάφιο).

Σε πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, η εξωτερική δύναμη είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Αν η δύναμη ταλαντούται συν/ημιτονοειδώς με συχνότητα ω, $F(t)=F_o\cos\omega t$, τότε η εξίσωση κίνησης είναι,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_o \cos\omega t\,. \qquad (28)$$

Από Φυσικής σκοπιάς, οι λύσεις που μας ενδιαφέρουν πρέπει να είναι ταλαντώσεις με συχνότητα ω, ίδια με της εφαρμοζόμενης δύναμης, δηλ. της μορφής

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi). \qquad (29)$$

Οι σταθερές (A, φ) υπολογίζονται, αντικαθιστώντας τη λύση (29) στην (28). Πράγματι,

$$(-m\omega^2 + k)A\cos(\omega t + \phi) - b\omega A\sin(\omega t + \phi) = F_o \cos\omega t\,.$$

Αναπτύσσουμε το όρισμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, cos( ), sin( ):

$$(-m\omega^2 + k)A(\cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi) - b\omega A(\sin\omega t\cos\phi + \cos\omega t\sin\phi) = F_o \cos\omega t$$

και ομαδοποιώντας τους όρους σε παράγοντες των cosωt, sinωt έχουμε,

$$[(-m\omega^2 + k)A\cos\phi - b\omega A\sin\phi - F_o]\cos\omega t - [(-m\omega^2 + k)A\sin\phi + b\omega A\cos\phi]\sin\omega t = 0$$

Οι συναρτήσεις cosωt, sinωt είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, άρα οι συντελεστές τους μηδενίζονται, συνεπώς προκύπτουν οι εξισώσεις,

$$\begin{aligned} &(-m\omega^2 + k)A\cos\phi - b\omega A\sin\phi - F_o = 0 \\ &(-m\omega^2 + k)A\sin\phi + b\omega A\cos\phi = 0 \end{aligned} \qquad (30)$$

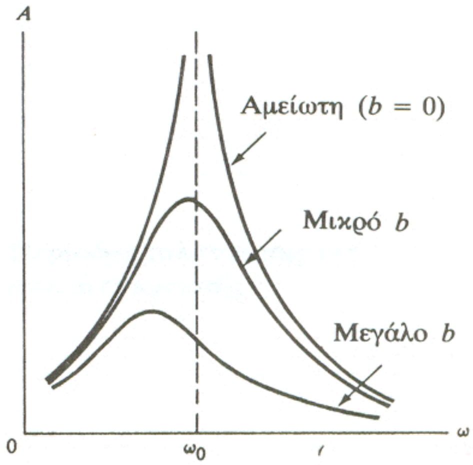
ή θέτοντας $\gamma = b/2m$ και $\omega_o^2 = k/m$, η (30) γράφεται,

$$\begin{aligned} &(-\omega^2 + \omega_o^2)A\cos\phi - 2\gamma\omega A\sin\phi = F_o / m \\ &(-\omega^2 + \omega_o^2)\sin\phi + 2\gamma\omega\cos\phi = 0 \end{aligned}$$

απ’ όπου υπολογίζεται το πλάτος A και η φάση φ,

$$A = \frac{F_o / m}{Z}, \quad \tan\phi = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \qquad (31)$$

όπου $Z = \sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$. Η ποσότης Z καλείται **εμπέδηση**. Στο Σχήμα 6 απεικονίζεται το πλάτος A σαν συνάρτηση της συχνότητας της εξωτερικής δύναμης με ή χωρίς τριβές.



Σχήμα 6 Το πλάτος ταλάντωσης σαν συνάρτηση της συχνότητας ω της εξωτερικής δύναμης

Παρατηρούμε ότι καθώς η απόσβεση μειώνεται (b→0), το πλάτος αυξάνεται. Η μεγάλη αύξηση του πλάτους όταν $\omega \approx \omega_o$ ονομάζεται **συντονισμός** και η ω_o **συχνότητα συντονισμού**. Το φαινόμενο του συντονισμού μπορεί να συμβεί σε οποιοδήποτε ταλαντούμενο σύστημα που διεγείρεται από εξωτερική δύναμη και έχει μεγάλη πρακτική σημασία, καθόσον αρκετά μικρές δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεγάλες ταλαντώσεις όταν η οι συχνότητές τους (των δυνάμεων) πλησιάζουν την ιδιοσυχνότητα του συστήματος ω_o.

Η γενική λύση λοιπόν της (28) θα είναι,

$$x(t) = \frac{F_o / m}{Z}\cos(\omega t + \phi) + \alpha e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta) \qquad (32)$$

όπου $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$ για $\gamma<\omega_o$ και α,θ αυθαίρετες σταθερές. Ο δεύτερος όρος στην (32) αποσβένει εκθετικά και μέσα σε χρόνο $t \approx 5\tau$ (όπου $\tau=1/\gamma$ είναι ο χρόνος απόσβασης) γίνεται αμελητέος, γι αυτό και ονομάζεται **παροδικός** (ή **μεταβατικός**) όρος. Έτσι μετά από ένα μικρό μεταβατικό διάστημα ($t \geq 5\tau$), η **ευσταθής κατάσταση** που απομένει δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και η μετατόπιση παρίσταται μόνο από τον πρώτο όρο της (32), δηλ. η ταλάντωση οδηγείται αποκλειστικά από την εξωτερική δύναμη.

Στην ευσταθή κατάσταση, ο ρυθμός προσφοράς έργου (δηλ. η παρεχόμενη ισχύς) προς τον ταλαντωτή από την εφαρμοζόμενη δύναμη (που ισούται με την απορροφούμενη ισχύ από τον ταλαντωτή) είναι

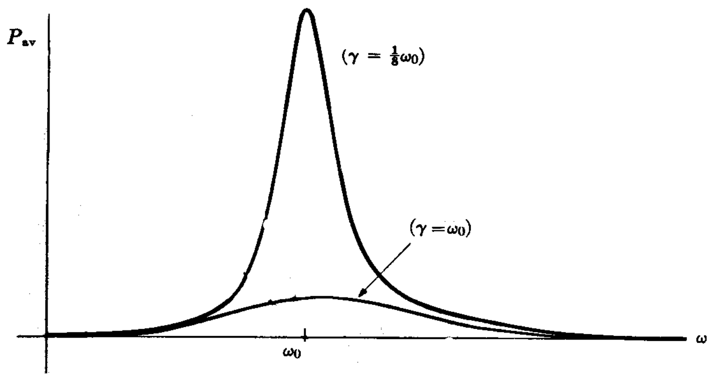
$$P(t) = \upsilon \cdot F(t) = -\frac{\omega F_o^2}{mZ}\sin(\omega t + \phi)\cos\omega t$$

($\upsilon \equiv \dot{x}$ είναι η ταχύτητα). Οπότε, η μέση τιμή της ισχύος μέσα σε μια περίοδο T είναι,

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = -\frac{\omega F_o^2}{mZ}\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \phi)\cos\omega t\,dt = -\frac{\omega F_o^2}{mZ}\frac{\sin\phi}{2} = \frac{F_o^2}{m}\frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \qquad (33)$$

Η απορροφούμενη ισχύς δαπανάται από τις τριβές (όντως, αν $\gamma=0 \Rightarrow P_{av}=0$). Στο Σχήμα 7 έχει σχεδιαστεί η ισχύς P_{av} σαν συνάρτηση της συχνότητας του διεγέρτη ω, για δύο τιμές του γ. Η μεγίστη τιμή της μέσης ισχύος P_{av} λαμβάνεται όταν $\omega=\omega_o$, δηλ. όταν συντονίζεται το ταλαντούμενο σύστημα με τον εξωτερικό διεγέρτη.

Σχήμα 7 Η μέση απορροφούμενη ισχύς από τον ταλαντωτή



2.4 Φασικός χώρος

Θεωρούμε ένα σύστημα με 1 βαθμό ελευθερίας το οποίο περιγράφεται από τη εξίσωση κίνησης,

$$\ddot{x} = f(x), \ x \in \Re \qquad (34)$$

Η συνάρτηση f(x) δεν εξαρτάται ρητά από τον χρόνο, οπότε λέμε ότι το σύστημα είναι **αυτόνομο**. Η διαφορική εξίσωση (34) είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x) \end{aligned} \qquad (35)$$

Αν εισάγομε τα διανύσματα $\vec{x} = (x, y)$ και $\vec{F} = (y, f)$, τότε η (35) γράφεται ισοδύναμα υπό διανυσματική μορφή,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}) \qquad (36)$$

Το επίπεδο (x,y) καλείται **φασικό επίπεδο** της εξίσωσης (34). Σημεία πάνω στο φασικό επίπεδο καλούνται **φασικά σημεία**, με αντίστοιχη **φασική ταχύτητα** $(\dot{x}, \dot{y})$. Το διάνυσμα $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ στο δεύτερο μέρος της (35) καλείται **διανυσματικό πεδίο** της φασικής ταχύτητας.

Μια λύση της (35) παριστάνει κίνηση (ή απεικόνιση) ενός φασικού σημείου πάνω στο φασικό επίπεδο, $\vec{\varphi}: \Re \to \Re^2$, τέτοια ώστε η ταχύτης του κινουμένου σημείου για κάθε χρονική στιγμή t να ισούται με τη φασική ταχύτητα στο εν λόγω σημείο του φασικού επιπέδου. Το πεδίον τιμών της απεικόνισης $\vec{\varphi}$ καλείται **φασική καμπύλη** ή **τροχιά** πάνω στο φασικό επίπεδο. Συνεπώς η φασική καμπύλη δίδεται από τις ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις,

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \dot{\varphi}(t) \end{aligned} \qquad (37)$$

Η φασική καμπύλη μπορεί να αποτελείται από ένα μόνο σημείο. Τέτοιο σημείο καλείται **σημείο ισορροπίας**. Η φασική ταχύτης σε ένα τέτοιο σημείο είναι μηδέν. Αν η ενέργεια διατηρείται, τότε κάθε φασική καμπύλη περιγράφεται από την εξίσωση E(x,y)=c (όπου c=const.).

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε την εξίσωση κίνησης ενός αρμονικού ταλαντωτή (σε κατάλληλες μονάδες),

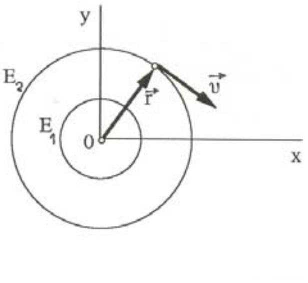
$$\ddot{x} = -x, \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}, \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

απ' όπου λαμβάνουμε,

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} \quad \acute{\eta} \quad E = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

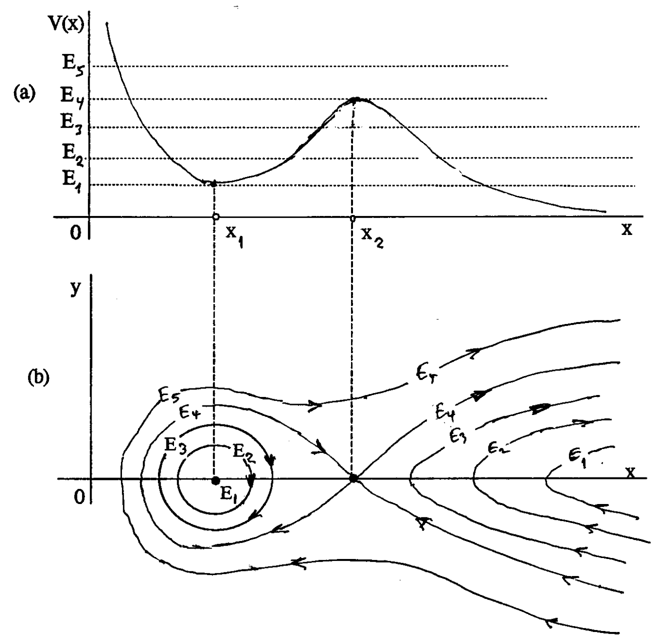
Οι ενεργειακές στάθμες είναι ομόκεντροι περιφέρειες και καθεμιά από αυτές αποτελεί και μια φασική καμπύλη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8. Το διάνυσμα της φασικής ταχύτητας στο σημείο (x,y) έχει συνιστώσες $\vec{\upsilon} = (y, -x)$, είναι κάθετο προς το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = (x, y)$ και είναι ίσου μέτρου με αυτό. Η κίνηση ενός φασικού σημείου πάνω στο επίπεδο των φάσεων είναι ομοιόμορφος γύρω από το σημείο 0, δηλ. $x = r_o \cos(\varphi_o - t)$ και $y = r_o \sin(\varphi_o - t)$ και φ_o αρχική φάση.

Σχήμα 8 Ενεργειακές στάθμες ενός αρμονικού ταλαντωτή πάνω στο φασικό επίπεδο



Παράδειγμα 2: Υποθέτουμε ότι η δυναμική ενέργεια δίδεται από την παρακάτω γραφική παράσταση του Σχήματος 9. Θα χαράξουμε τις οικογένειες των ενεργειακών επιπέδων: $\frac{1}{2} y^2 + V(x) = E.$

Σχήμα 9 (a) Τυχούσα δυναμική ενέργεια και (b) μερικές χαρακτηριστικές ενεργειακές στάθμες στο φασικό επίπεδο



Κατ' αρχήν, θα πρέπει να σημειώσουμε τα εξής:

1. Τα σημεία x_1 και x_2 είναι ακρότατα της συνάρτησης V(x).
2. Το σημείο $(x_1,0)$ είναι σημείο ισορροπίας. (V'=0)
3. Κάθε ενεργειακό επίπεδο E_i είναι μια ομαλή καμπύλη στη γειτονική περιοχή κάθε σημείου που δεν είναι σημείο ισορροπίας.

Για να δούμε καλύτερα το πρόβλημα, ας φανταστούμε ένα μπαλάκι το οποίο κυλίεται μέσα στο δυναμικό του Σχήματος 8(a). Η κίνηση που θα εκτελεί το σώμα εξαρτάται από τη ενέργειά του, Ε. Αν για παράδειγμα $E_1<E<E_4$, τότε το σώμα αφεθεί μέσα στη περιοχή του πηγαδιού (κοντά στο σημείο x_1), τότε το σώμα θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, αν όμως αφεθεί δεξιά του φράγματος (δηλ. πέραν του x_2), το σώμα εν γένει θα ανακρουστεί επί του φράγματος και στη συνέχεια θα διαφύγει στο άπειρο. Έχομε ήδη εξετάσει ποιοτικά τη κίνηση σώματος μέσα σε τέτοιο δυναμικό.

Γυρνάμε πάλι πίσω στη μαθηματική θεώρηση του προβλήματος. Έστω ένα σημείο Μ στο φασικό επίπεδο το οποίο παριστάνει τις αρχικές συνθήκες του συστήματος (35). Υποθέτουμε ότι κάθε λύση μπορεί να εξελιχθεί χρονικά για $\forall t$. Η λύση σε $\forall t$ εξαρτάται από το Μ. Έστω M(t) το προκύπτον σημείο στο φασικό επίπεδο, οπότε

$$M(t) = g^t M, \qquad (38)$$

όπου g^t είναι μια απεικόνιση του φασικού επιπέδου στον εαυτό του, $g^t: \Re^2 \rightarrow \Re^2$. Η απεικόνιση g^t είναι αμφιδιαφορίσιμη (diffeomorphism, ένα-προς-ένα διαφορίσιμη απεικόνιση με την αντίστροφη απεικόνιση επίσης διαφορίσιμη). Επίσης η απεικόνιση g^t, $t \in \Re$ αποτελεί μια ομάδα. Η ομάδα αυτή επίσης καλείται **ροή φάσης** που δίδεται από το σύστημα (35).

Παράδειγμα 1: Έστω η εξίσωση: $\ddot{x} = x$, οπότε προκύπτει το σύστημα: $\begin{matrix} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{matrix}$. Έστω οι αρχικές συνθήκες: t=0, x_o=0, y_o=2. Μπορούμε να βρούμε την τροχιά της,

$$x = \varphi(t,t_o) = e^t - e^{-t}$$
$$y = \dot{\varphi}(t,t_o) = e^t + e^{-t}$$

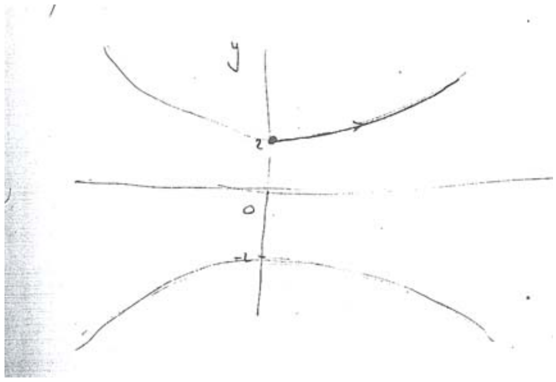
Απαλείφομε το t,

$$2\,e^t = y + x,$$
$$2\,e^{-t} = y - x$$

άρα,

$$4 = y^2 - x^2 \;\;\Rightarrow\;\; y = \pm\sqrt{x^2 + 4}$$

Στο παρακάτω Σχήμα 10, απεικονίζεται η τροχιά του σημείου στο φασικό επίπεδο.



Σχήμα 10 Η τροχιά πάνω στο φασικό επίπεδο

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε την εξίσωση του απλού μαθηματικού εκκρεμούς,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

Θέτοντας x=θ προκύπτει το σύστημα,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{g}{L}\sin x \cong -\frac{g}{L}x \end{aligned} \qquad (2)$$

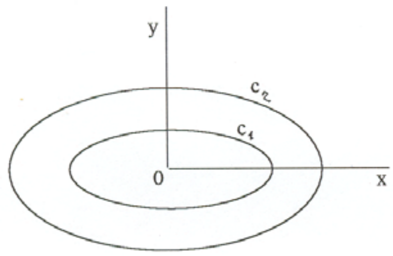
Σημείο ισορροπίας είναι: x=y=0. Ζητούνται οι τροχιές της (2). Πράγματι,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{g}{L}x}{y} \quad \Rightarrow \quad ydy = -\frac{g}{L}xdx$$

άρα,
$$y^2 + \frac{x^2}{\omega^2} = c\ , \qquad (3)$$

όπου ω^2=L/g. Η (3) είναι η εξίσωση των τροχιών του συστήματος (2). Μερικές τροχιές απεικονίζονται παραστατικά στο Σχήμα 11.

Σχήμα 11 Ελλειπτικές τροχιές του μαθηματικού εκκρεμούς πάνω στο φασικό επίπεδο



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: ΣΕΙΡΑ 1

1. Να μελετηθεί η κίνηση σώματος μάζας m το οποίο βρίσκεται μέσα σε δυναμικό πεδίο με δυναμική ενέργεια: $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.
2. Απλό εκκρεμές αφήνεται από την ηρεμία σε μικρή γωνία φ ως προς την ανερχόμενη κατακόρυφο. Δείξετε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να δεκαπλασιαστεί η γωνιακή μετατόπιση είναι περίπου $\omega_o$ln20, όπου όπου $\omega_o^2 = L/g$. Υπολογίσετε τον χρόνο αυτό για εκκρεμές με περίοδο T=2sec και βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του εκκρεμούς όταν φθάσει τη κατακόρυφο προς τα κάτω.
3. Σώμα μάζας m πέφτει κατακόρυφα υπό την επίδραση της βαρύτητος. Να γράψετε την εξίσωση κίνηση του σώματος, λαμβάνοντας υπόψιν και την αντίσταση του αέρος, -bυ. Να ολοκληρώσετε την προκύπτουσα εξίσωση και να δειχθεί ότι η μεγίστη ταχύτης, αν το σώμα αφήνεται εκ της ηρεμίας, είναι υ=mg/b.