Περιοδική Ομογενοποίηση Εξισώσεων Hamilton-Jacobi

ΧΡΗΣΤΟΣ ΖΩΧΙΟΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2001

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Στα προβλήματα μηχανικής, αλλά και στα περισσότερα επιστημονικά προβλήματα, αντιμετωπίζουμε συχνά υλικά, τα οποία αποτελούνται από πολλαπλά συστατικά. Κάποια απλά παραδείγματα περιλαμβάνουν πλαστικοποιημένους δίσκους, συνθετικά ενισχυμένα με κλωστή, πορώδη στερεά γεμισμένα με υγρό. Η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος που περιλαμβάνει τέτοιες μεταβολές στην κατασκευή μπορεί να είναι πολύ δύσκολη. Είναι, επομένως, φυσικό να αναζητήσουμε απλούστερες εξισώσεις, οι οποίες, ενεργά, θα εξομαλύνουν τις όποιες μεταβολές στην υποκατασκευή. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας περίπτωσης παρουσιάζεται κατά την περιγραφή της κίνησης ενός υγρού ή στερεού στοιχειού. Συνήθως δε θεωρούμε το στοιχείο ως σύνθεση διακριτών αντιδρούντων μορίων, αλλά αντίθετα χρησιμοποιούμε μία συνεχή προσέγγιση που υποθέτει ότι το υλικό είναι συνεχώς κατανεμημένο. Με την χρήση αυτής της προσέγγισης, οι υλικές παράμετροι, όπως είναι η πυκνότητα μάζας, θεωρείται ότι αναπαριστούν ένα μέσο όρο.

Τα μαθηματικά προβλήματα, στα οποία οδηγείται κάποιος στη μηχανική, φυσική, χημεία, στη μελέτη των σύνθετων υλικών, των μακροσκοπικών ιδιοτήτων κρυστάλλινων ή πολυμερών κατασκευών, στο σχεδιασμό πυρηνικών αντιδραστήρων κτλ., είναι της κατηγορίας των προβλημάτων συνοριακών τιμών σε μέσα με περιοδική κατασκευή. Εάν η περίοδος της κατασκευής είναι μικρή, συγκρινόμενη με το μέγεθος του πεδίου στο οποίο μελετάται το σύστημα, τότε ζητάμε να έχουμε ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της λύσης, συσχετισμένο με την μικρή παράμετρο ϵ, η οποία αποτελεί την κλίμακα της περιόδου της κατασκευής ως προς ένα τυπικό μήκος στο πεδίο. Με αυτόν τον τρόπο ζητάμε να πετύχουμε, με χρήση της διαδικασίας των συστηματικών αναπτυγμάτων, το πέρασμα από την **μικροσκοπική** περιγραφή στην **μακροσκοπική** περιγραφή της συμπεριφοράς του συστήματος.

Με μαθηματική ορολογία, τα παραπάνω προβλήματα γράφονται ως εξής: Δίνεται μία οικογένεια μερικών διαφορικών τελεστών A^ϵ, οι οποίοι εξαρτούνται από την μικρή παράμετρο ϵ. Οι μερικοί διαφορικοί τελεστές μπορεί να είναι ανεξάρτητοι ή εξαρτημένοι από τον χρόνο, γραμμικοί ή μη γραμμικοί κτλ. Επίσης, έχουν συντελεστές που είναι περιοδικές συναρτήσεις , σε όλες ή σε ορισμένες μεταβλητές, με περιόδους ανάλογες του ϵ. Το ϵ έχει υποτεθεί μικρό, άρα έχουμε μία οικογένεια τελεστών με **ταχέως ταλαντευόμενους συντελεστές.**

Σε ένα χωρίο Ω, έχουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών της μορφής

$$\begin{cases} A^\epsilon u_\epsilon = f \quad \text{στο} \quad \Omega, \\ u_\epsilon \quad \text{ικανοποιεί κατάλληλες συνοριακές συνθήκες} \end{cases} \tag{1}$$

το οποίο υποθέτουμε ότι είναι καλά ορισμένο για σταθερό $\epsilon > 0$. Το πρόβλημα έγγειται, τώρα, στο να πάρουμε ένα ανάπτυγμα της u_ϵ

$$u_\epsilon = u_o + \epsilon u_1 + \dots\ , \tag{2}$$

το οποίο, γενικότερα, θα είναι ασυμπτωτικό, ή, το λιγότερο, να πάρουμε τους πρώτους όρους αυτού του αναπτύγματος, μαζί με ένα θεώρημα σύγκλισης, καθώς το $\epsilon \to 0$. Το είδος των αποτελεσμάτων που επιτυγχάνονται στις περισσότερες περιπτώσεις σχετίζονται με έναν κατάλληλο ορισμό σύγκλισης (αναγκαστικά **ασθενούς** τύπου, όπως θα δούμε), η u_ϵ, δηλαδή , συγκλίνει, όπως το $\epsilon \to 0$ στην συνάρτηση u_o, όπου η u_o είναι η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} Au_o = f \quad \text{στο} \quad \Omega, \\ u_o \quad \text{ικανοποιεί κατάλληλες συνοριακές συνθήκες} \end{cases} \tag{3}$$

Το A αποτελεί, γενικότερα, έναν μερικό διαφορικό τελεστή με απλούς συντελεστές. Καλείται **ο ομογενοποιημένος** τελεστής της οικογένειας A^ϵ, επειδή προσεγγίζουμε την u_ϵ από την u_o, η οποία ικανοποιεί μία εξίσωση με απλούς συντελεστές (βλέπε [BLP]). Οι συντελεστές του A καλούνται, εξ'ορισμού, **ενεργοί συντελεστές** ή **ενεργές παράμετροι** που περιγράφουν τις μακροσκοπικές ιδιότητες του θεωρούμενου μέσου.

Το πιο σημαντικό στοιχείο του περάσματος από το (1) στο (3) είναι η **άμεση** αναλυτική κατασκευή του A (δηλαδή των συντελεστών του) και όχι μόνο η απλή δήλωση ότι ένας τέτοιος τελεστής υπάρχει. Αυτή η κατασκευή απαιτεί, τυπικά, την επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών μέσα σε ένα κελλί μίας περιόδου. Αυτό το πρόβλημα καλείται **πρόβλημα του κελλιού.** Έτσι, η επίλυση του (1), όταν το ϵ είναι μικρό, αντικαθίσταται από την επίλυση ενός προβλήματος του κελλιού και ύστερα του προβλήματος (3). Το πρόβλημα του κελλιού, όπως και το (3), πρέπει να αντιμετωπισθούν αριθμητικά, αφού, εκτός από τετριμμένες περιπτώσεις, ακριβείς λύσεις σε κλειστή μορφή δεν είναι δυνατόν να βρεθούν. Το σημαντικό, όμως, είναι ότι, εκεί που η άμεση αριθμητική επίλυση του (1), για ϵ μικρό, είναι ένα περίπλοκο υπολογιστικό πρόβλημα, η επίλυση του προβλήματος του κελλιού και του (3) είναι, συνήθως, ένα δεδομένο πρόβλημα στην αριθμητική ανάλυση.

Η παραπάνω διαδικασία καλείται **ομογενοποίηση.** Η πιο συνήθης μέθοδος που ακολουθείται σε αυτήν την διαδικασία για να πάρουμε τον A από την οικογένεια A^ϵ, βασίζεται στην κατασκευή ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων, χρησιμοποιώντας **πολλαπλές κλίμακες.** Εισάγουμε, συνήθως, **δύο φυσικές χωρικές κλίμακες μήκους.** Η πρώτη μετράει τις μεταβολές μέσα σε ένα κελλί μίας περιόδου (η **γρήγορη** κλίμακα), εκφράζεται μέσω της μεταβλητής $y = \frac{x}{\epsilon}$ και ορισμένες φορές αναφέρεται ως **μικροκλίμακα.** Η δεύτερη μετράει τις μεταβολές μέσα στο πεδίο του προβλήματος (η **αργή** κλίμακα), εκφράζεται μέσω της μεταβλητής x και αναφέρεται ως **μακροκλίμακα.**

Παρακάτω θα εξετάσουμε κάποιες εφαρμογές της ομογενοποίησης στην περίπτωση εξισώσεων Hamilton-Jacobi (για τις οποίες ειδική αναφορά θα γίνει στην επόμενη ενότητα). Θεωρούμε το κλασσικό, πρώτης τάξης, πρόβλημα Hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} u_t^\epsilon + H\Big(Du^\epsilon, \frac{x}{\epsilon}\Big) = 0 & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u^\epsilon = u_o & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{4}$$

όπου η $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ είναι $Y-$περιοδική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή ($Y = [0,1]^N$). Κάτω από κατάλληλες υποθέσεις, η ακολουθία $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ των λύσεων ιξώδους (Ενότητα 2) της (4) συγκλίνει, καθώς το $\epsilon \to 0$, στη λύση ιξώδους u του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + \overline{H}(Du) = 0 & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u = u_o & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{5}$$

Η συνάρτηση $\overline{H} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ καλείται ενεργούσα Χαμιλτονιανή και ορίζεται μέσω του εξής προβλήματος κελλιού: για δωσμένο $p \in \mathbb{R}^N$ ψάχνουμε $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$, ώστε η $[0,1]^N-$ περιοδική συνάρτηση v να είναι μοναδική λύση της εξίσωσης

$$H(p + Dv(y), y) = \lambda \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N.$$

Η ύπαρξη και μοναδικότητα μίας λύσης (λ, v) αυτού του προβλήματος αποδεικνύεται στην Ενότητα 3. Το γεγονός της ύπαρξης μοναδικότητας μας επιτρέπει να ορίσουμε την συνάρτηση $\overline{H} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\overline{H}(p) = \lambda.$$

Όταν u είναι μία βαθμωτή συνάρτηση, ορισμένη στο $\mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ και V μία βαθμωτή συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^N$, η Μ.Δ.Ε.

$$u_t(x,t) + \frac{1}{2}|Du(x,t)|^2 - V(x) = 0,$$

είναι γνωστή ως εξίσωση εικόνας. Υποθέτουμε ότι, στο πρόβλημα (4) η H έχει την μορφή

$$H(p,x) = \frac{1}{2}|p|^2 - V(x), \quad p, x \in \mathbb{R}^N$$

όπου η $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής, $Y-$περιοδική συνάρτηση. Η ομογενοποίηση αυτής της εξίσωσης αποτελεί ένα ενδιαφέρον πρόβλημα, καθώς:

(α) Στην κλασσική μηχανική, η συμπεριφορά ενός μορίου κινούμενου σε δυναμικό $V(x)$ περιγράφεται από αυτήν την Χαμιλτονιανή. Η συνάρτηση u στην εξίσωση εικόνας αναπαριστά την φάση της κίνησης (καλείται συνάρτηση φάσης).

(β) Στην γεωμετρική οπτική, η διάδοση του φωτός σε ένα ισοτροπικό μέσο περιγράφεται απο τη Μ.Δ.Ε. $c(x)|Du| = 1$, που μπορεί να γραφεί $\frac{1}{2}|Du|^2 - \Big(1/2c(x)^2\Big) = 0$. Εδώ, $c(x)$ είναι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο μέσο και $u(x,t)$ είναι η συνάρτηση φάσης. Γενικότερα, το δυναμικό V στην εξίσωση εικόνας στα προβλήματα οπτικής, δίνεται από την σχέση $V(x) = \frac{1}{2}\eta^2(x)$, όπου ο $\eta = \frac{c_o}{c}$ καλείται δείκτης ανάκλασης, c είναι η ταχύτητα του φωτός στο οπτικό μέσο και c_o η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Μπορούμε να μεταφράσουμε τα αποτελέσματα της ομογενοποίησης ως μελέτη γεωμετρικής οπτικής σε μέσα με μικρής κλίμακας περιοδική κατασκευή.

Ένα από τα ερωτήματα που τίθονται σε προβλήματα ομογενοποίησης είναι και η εύρεση αναπαραστάσεων για την $\overline{H}$. Για την περίπτωση της εξίσωσης εικόνας έχουμε την εξής αναπαράσταση:

$$\overline{H}(p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \lim_{T\to+\infty} \inf_{x(\cdot)} C\Big(p, T, x(\cdot)\Big),$$

όπου

$$C\Big(p, T, x(\cdot)\Big) = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}|x'(s) - p|^2 + V\Big(x(s)\Big)\right] ds.$$

Αυτή γράφεται και με τον εξής τρόπο:
Ορίζουμε την συνάρτηση

$$h\Big(p, T, x(\cdot)\Big) = \frac{1}{T}\int_0^T \left[p \cdot x'(s) - \frac{1}{2}|x'(s)|^2 - V\Big(x(s)\Big)\right] ds,$$

οπότε η $\overline{H}$ γράφεται ως

$$\overline{H} = \lim_{T\to+\infty} \sup_{x(\cdot)} h\Big(p, T, x(\cdot)\Big).$$

Ψάχνουμε, για σταθερό $T > 0$, για ένα μονοπάτι $x(\cdot)$ που να μας δίνει το $\inf_{x(\cdot)} C\Big(p, T, x(\cdot)\Big)$. Για την ύπαρξη αυτού και για περαιτέρω λεπτομέρειες, βλέπε [C2]. Στη συνέχεια θα δούμε κάποια απλά παραδείγματα:

Μακρά ορθογώνια εμπόδια: Υποθέτουμε ότι

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{αν το } x \text{ ή το } y \text{ είναι ακέραιοι,} \\ +\infty & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

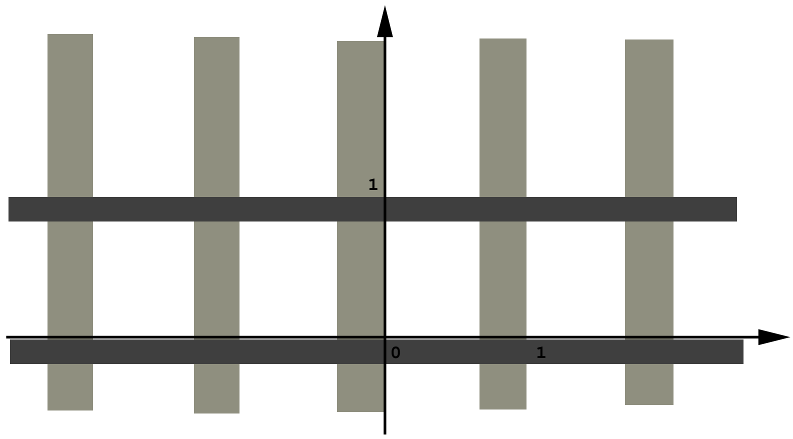
Επειδή το σύνολο όπου η V είναι μηδενική είναι κλειστό, αμέσως μόλις έχουμε $V\Big(x(s_o)\Big) = +\infty$ για κάποιο s_o, παίρνουμε, ακολούθως, ότι $C\Big(p, T, x(\cdot)\Big) = +\infty$. Επομένως ένα βέλτιστο μονοπάτι $X(\cdot)$ ικανοποιεί την σχέση

$$V\Big(X(\cdot)\Big) \equiv 0.$$

Θεωρούμε ένα τέτοιο μονοπάτι με αρχή το σημείο $(0,0)$. Αυτό το μονοπάτι αρχίζει πηγαίνοντας πάνω, κάτω, δεξιά ή αριστερά, για μήκος ίσο με 1, και μία από αυτές τις επιλογές είναι καλύτερη από τις άλλες τρεις. Ακολούθως, μία ακόμη επιλογή παρουσιάζεται. Η κατάσταση, όμως, σε αυτό το δεύτερο σημείο είναι ακριβώς παρόμοια με αυτήν στην αρχή (λόγω περιοδικότητας), οπότε η βέλτιστη επιλογή που αρχίζει από το δεύτερο σημείο θα είναι η ίδια με πριν. Καταλήγουμε με τέσσερα πιθανά βέλτιστα μονοπάτια, με αρχή το $(0,0)$, δύο οριζόντια και δύο κάθετα (βλ. Σχήμα 1), όπου το καθένα περιγράφεται από μία σταθερή ταχύτητα (η εξίσωση Euler-Lagrange μας λέει ότι, αν $X(\cdot)$

είναι βέλτιστο για το $\inf_{x(\cdot)} C\Big(p,T,x(\cdot)\Big)$, τότε ισχύει $X''(s) = DV\Big(X(s)\Big)$, άρα στην περίπτωση αυτή, όπου $DV\Big(X(s)\Big) \equiv 0$, έχουμε για την ταχύτητα ότι $X'(s) = v$, όπου v σταθερά, για κάθε μονοπάτι). Συμπεραίνουμε ότι

$$\overline{H}(p_1,p_2) = \sup_{v\in\mathbb{R}} \left\{ p_1 v - \frac{v^2}{2}, p_2 v - \frac{v^2}{2} \right\} = \frac{1}{2}\max({p_1}^2,{p_2}^2).$$



Σχήμα 1

Κυκλικά εμπόδια: Υποθέτουμε ότι

$$V(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(y-\frac{1}{2}\Big)^2 < \frac{1}{4}\ , \\ 0 & \text{αλλιώς}\ , \end{cases}$$

και η V είναι $[0,1]^2-$περιοδική. Όπως και πριν, ένα βέλτιστο μονοπάτι θα πρέπει να ικανοποιεί την $V\Big(X(\cdot)\Big) \equiv 0$. Ένα βέλτιστο μονοπάτι χρειάζεται, επίσης, να περάσει από τα σημεία όπου οι δίσκοι εφάπτονται μεταξύ τους, άρα αποτελεί μία διαδοχή από τμήματα που είναι οριζόντια, κάθετα ή κατά μήκος του ενός τετάρτου ενός κύκλου(βλ. Σχημα 2). Έτσι παίρνουμε μόνο τρία λογικά μονοπάτια:

i) Το οριζόντιο μονοπάτι, με $h\Big(p,T,x(\cdot)\Big) = p_1 v - (v^2/2)$, όπου η μεγαλύτερη τιμή είναι $\frac{p_1^2}{2}$.

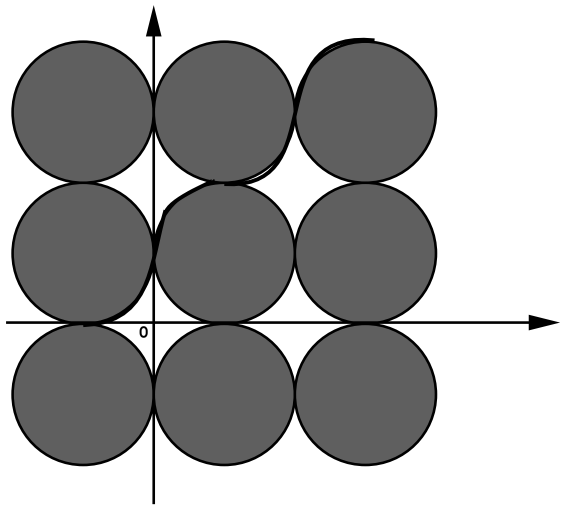
ii) Το κάθετο μονοπάτι, με $h\Big(p,T,x(\cdot)\Big) = p_2 v - (v^2/2)$, όπου η μεγαλύτερη τιμή είναι $\frac{p_2^2}{2}$.

iii) Το μονοπάτι που είναι διαδοχή από δύο τέταρτα των κύκλων, τα οποία επαναλαμβάνονται άπειρες φορές. Υπολογίζοντας το καλύτερο h για την περίπτωση αυτή, βρίσκουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα πρέπει να είναι μία σταθερά α και

$$h\Big(p, T, x(\cdot)\Big) = \alpha\,\frac{p_1 + p_2}{\pi} - \frac{\alpha^2}{8}.$$

Τελικά προκύπτει ότι

$$\overline{H}(p_1, p_2) = \frac{1}{2}\max\left\{{p_1}^2, {p_2}^2, \frac{4(p_1+p_2)^2}{\pi^2}\right\}.$$



Σχήμα 2

Εμπόδια σε σχήμα διαμαντιού: Υποθέτουμε ότι

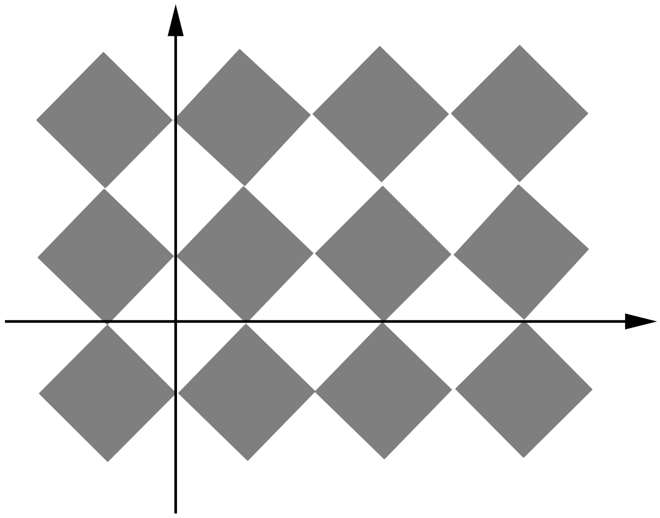
$$V(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\ , \\ 0 & \text{αλλιώς}\ , \end{cases}$$

και η V είναι $[0,1]^2-$περιοδική. Όπως πριν, ένα βέλτιστο μονοπάτι θα πρέπει να ικανοποιεί την $V\Big(X(\cdot)\Big) \equiv 0$ και χρειάζεται, επίσης, να περνάει από τις κορυφές των τετραγώνων. Δουλεύοντας όπως και πριν, βρίσκουμε ότι ένα βέλτιστο μονοπάτι χρειάζεται να είναι οριζόντιο, κάθετο ή διαγώνιο(βλ. Σχημα 3). Κατά μήκος ενός βέλτιστου διαγώνιου μονοπατιού, η ταχύτητα είναι σταθερή και το αντίστοιχο h δίνεται από την σχέση

$$h\Big(p, T, x(\cdot)\Big) = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}v - \frac{v^2}{2}.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\overline{H}(p_1,p_2) = \frac{1}{2}\max\left\{{p_1}^2, {p_2}^2, \frac{(p_1+p_2)^2}{2}\right\}.$$



Σχήμα 3

Τετράγωνα εμπόδια: Υποθέτουμε ότι

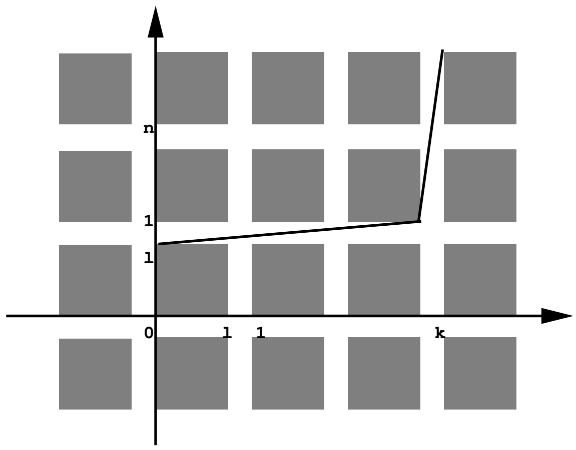
$$V(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{στο } (0,l)^2 \ , \\ 0 & \text{στο } [0,1]^2 - (0,l)^2 \ , \end{array} \right.$$

με $l > \frac{1}{2}$ και V $[0,1]^2-$περιοδική. Όπως πριν, ένα βέλτιστο μονοπάτι πρέπει να ικανοποιεί την $V\Big(X(\cdot)\Big) \equiv 0$. Υποθέτοντας ότι $p_1 \geq p_2 \geq 0$, υπάρχουν τρεις δυνατές επιλογές, αρχίζοντας από το $(0,l)$: ένα οριζόντιο τμήμα, ένα κάθετο τμήμα ή ένα πλάγιο τμήμα μέχρι να φτάσουμε σε ένα τετράγωνο, στην κάτω δεξιά γωνία αυτού $(k-(1-l),1)$ (όπου k ένας ακέραιος), ακολουθούμενο από ένα άλλο πλάγιο τμήμα μέχρι να φτάσουμε σε ένα τετράγωνο, στην πάνω αριστερή γωνία αυτού $(k,n+l)$ (όπου n ένας άλλος ακέραιος). Μετά επιστρέφουμε στην ίδια κατάσταση και επαναλαμβάνουμε το ίδιο σχέδιο(βλ. Σχήμα 4). Για αυτό το τρίτο είδος μονοπατιού (σχεδιασμένο παρακάτω για $k=3$ και $n=2$), βρίσκουμε ότι

$$h\Big(p,T,x(\cdot)\Big) = \frac{(N+K)^2}{2T^2} - \frac{kp_1+np_2}{T},$$

όπου το $K>0$ ικανοποιεί την σχέση $K^2=(k-1+l)^2+(1-l)^2$ και το $N>0$ την σχέση $N^2=(n-1-l)^2+(1-l)^2$. Συμπεραίνουμε, τελικά, ότι

$$\overline{H}(p_1,p_2) = \frac{1}{2}\max\left[{p_1}^2, {p_2}^2, \left(\sup\left\{\frac{k|p_1|+n|p_2|}{K+N}\middle| k,n\in\mathbb{N}\right\}\right)^2\right].$$



Σχήμα 4

Μία άλλη κατηγορία προβλημάτων ομογενοποίησης για εξισώσεις Hamilton-Jacobi, είναι η ακόλουθη: Για $\epsilon > 0$ θεωρούμε το παρακάτω, τύπου Neumann, πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} H\Big(Du^\epsilon(x), u^\epsilon(x), x, \frac{x}{\epsilon}\Big) = 0 & \text{στο} \quad \Omega_\epsilon \ , \\ B\Big(Du^\epsilon(x), u^\epsilon(x), x, \frac{x}{\epsilon}\Big) = 0 & \text{στο} \quad \partial\Omega_\epsilon \ . \end{cases} \tag{6}$$

Εδώ, $\Omega_\epsilon = \epsilon\Omega \equiv \{\epsilon x | x \in \Omega\}$ και το Ω είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Επίσης, για $\epsilon > 0$, θεωρούμε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} H\Big(Du^\epsilon(x), u^\epsilon(x), x, \frac{x}{\epsilon}\Big) = 0 & \text{στο} \quad \Omega_\epsilon \ , \\ u^\epsilon(x) = b\Big(x, \frac{x}{\epsilon}\Big) & \text{στο} \quad \partial\Omega_\epsilon \ . \end{cases} \tag{7}$$

Ενδιαφερόμαστε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων u^ϵ του (6) και του (7) καθώς το $\epsilon \to 0$, υπό συγκεκριμένες υποθέσεις περιοδικότητας για το Ω, καθώς και για τις H, B και b. Θεωρούμε τις παρακάτω υποθέσεις σχετικά με το Ω :
(Ω1) Το Ω είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ με σύνορο C^1.

(Ω2) $\Omega + \mathbb{Z}^N = \Omega$.

Έστω ότι με T^N συμβολίζουμε τον $N-$διάστατο τόρο $\frac{\mathbb{R}^N}{\mathbb{Z}^N}$ και έστω $\pi : \mathbb{R}^N \to T^N$ η κανονική προβολή.
(Ω3) Η εικόνα $\pi(\Omega)$ είναι συνεκτικό σύνολο στο T^N.
Η συνθήκη (Ω1) μαζί με την (Ω2) εγγυώνται ότι, αν το Ω_o είναι μία συνεκτική συνιστώσα του Ω, τότε

$$\Omega = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^N} (z + \Omega_o). \tag{8}$$

Υποθέτουμε ότι $\Omega \neq \emptyset$ και $\Omega \neq \mathbb{R}^N$. Έστω ότι το Ω_o είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, με σύνορο C^1 και τέτοιο ώστε $\overline{\Omega}_o \subset (0,1)^N$. Θέτουμε

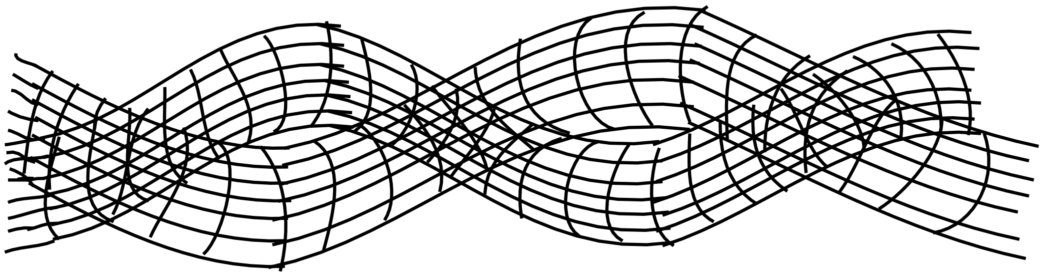
$$\Omega_1 = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^N} (z + \Omega_o),$$

$$\Omega_2 = \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^N} (z + \overline{\Omega}_o).$$

Τα σύνολα Ω_1 και Ω_2 ικανοποιούν τις $(\Omega 1) - (\Omega 3)$, αν το Ω_o είναι συνεκτικό και αν το $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_o$ είναι συνεκτικό, αντίστοιχα. Ένα κάπως πιο περίπλοκο παράδειγμα δίνεται από την (8), με το Ω_o να έχει σπειροειδή κατασκευή με περίοδο δύο ή και περισσότερο. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε την περίπτωση όπου $N = 3$. Έστω $\rho > 0$ και $\epsilon > 0$, ώστε $\rho + \epsilon < \frac{1}{2}$. Θέτουμε

$$\Omega_o = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \rho \cos \pi z,\ y = \rho \sin \pi z\} + U(0,\epsilon),$$

όπου η $U(\alpha, r)$ συμβολίζει την ανοιχτή μπάλα ακτίνας r με κέντρο το α. Το σύνολο Ω που ορίζεται από την (8), με αυτό το Ω_o, ικανοποιεί τις $(\Omega 1) - (\Omega 3)$.



Σχήμα 5

Η συνθήκη $(\Omega 3)$ είναι μία φυσική υπόθεση των ασυμπτωτικών προβλημάτων. Για παράδειγμα, για $N = 1$ θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u(x) + |u'(x)| = f\left(\frac{x}{\epsilon}\right) & \text{στο} \quad \Omega_\epsilon\ , \\ \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) u'(x) = 0 & \text{στο} \quad \partial\Omega_\epsilon\ . \end{cases} \tag{9}$$

Εδώ έχουμε

$$\Omega = \mathbb{Z} + \Omega_o\ , \quad \Omega_o = \Big(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\Big) \bigcup \Big(\frac{4}{6}, \frac{5}{6}\Big),$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in \mathbb{Z} + \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right), \\ 1 & \text{αν} \quad x \in \mathbb{Z} + \left(\frac{4}{6}, \frac{5}{6}\right), \end{cases}$$

και το $\eta(y)$ συμβολίζει το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο Ω, δηλαδή $\eta(\frac{1}{6}) = -1$, $\eta(\frac{2}{6}) = 1$. Η μοναδική λύση δίνεται από την $u^\epsilon(x) = f\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big)$ και η οριακή συμπεριφορά της είναι ταλαντωτική, καθώς το $\epsilon \to 0$. Συμπερασματικά, κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\pi(\Omega)$ αποτελεί έναν «διαφορετικό κόσμο» και πρέπει να αντιμετωπισθεί ξεχωριστά στο ασυμπτωτικό μας πρόβλημα.

Το πρόβλημα κελλιού που συνδέεται με το (6) είναι το εξής: για δωσμένα $(p,u,x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ ψάχνουμε $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times BUC(\overline{\Omega})$, ώστε η $[0,1]^N-$περιοδική συνάρτηση v να είναι λύση του

$$\begin{cases} H\Big(p + Dv(y), u, x, y\Big) = \lambda \quad \text{στο} \quad \Omega \;, \\ B\Big(p + Dv(y), u, x, y\Big) = 0 \quad \text{στο} \quad \partial\Omega \;. \end{cases} \tag{10}$$

Με τις υποθέσεις $(\Omega 1)-(\Omega 3)$ και με κατάλληλες υποθέσεις για τις συναρτήσεις H, B, προκύπτει η ύπαρξη και η μοναδικότητα μίας λύσης $(\lambda, v) \in \mathbb{R}\times BUC(\overline{\Omega})$ του (10), όπου η v είναι Lipschitz συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Το γεγονός της ύπαρξης μοναδικότητας μας επιτρέπει να ορίσουμε την συνάρτηση $\overline{H} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\overline{H}(p,u,x) = \lambda,$$

όπου (λ, v) είναι η λύση του (10), για κάποια $v \in BUC(\overline{\Omega})$. Η συνάρτηση $\overline{H}$, όπως ορίστηκε, καλείται «η ενεργούσα Χαμιλτονιανή» που συνδέεται με το πρόβλημα (6). Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες της $\overline{H}$ είναι η εξής:
Η Hamilton-Jacobi εξίσωση

$$\overline{H}\Big(Du(x), u(x), x\Big) = 0 \quad \text{στο} \quad \Omega, \tag{11}$$

έχει μία μοναδική φραγμένη λύση u στο Ω. Έτσι, το βασικό αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε, τελικά, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, δίνεται από το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.1 *Υποθέτοντας τις* $(\Omega 1)-(\Omega 3)$ *και κάνοντας συγκεκριμένες υποθέσεις για τις* H *και* B, *προκύπτει ότι, εάν* u^ϵ *και* u *είναι οι μοναδικές φραγμένες λύσεις των (6) και (11), αντίστοιχα, τότε*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\overline{\Omega}_\epsilon} |u^\epsilon - u| = 0.$$

Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για το πρόβλημα Dirichlet (7), βλέπε [HI]. Οι υποθέσεις για την H, καθώς και αυστηρές αποδείξεις των παραπάνω, θα δοθούν στην Ενότητα 3. Επίσης, όπου γίνεται λόγος, παραπάνω, για λύσεις, αυτές στην πραγματικότητα είναι λύσεις ιξώδους (Ενότητα 2). Οι παραπάνω εφαρμογές είναι ενδεικτικές του σημαντικού ρόλου της περιοδικής ομογενοποίησης στις εξισώσεις Hamilton-Jacobi.

2 Λύση ιξώδους για τις εξισώσεις Hamilton-Jacobi

Εξισώσεις Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x,t,Du) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0,$$

όπως επίσης και

$$\lambda u + H(x, Du) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

εμφανίζονται σε πολλά πεδία, όπως στο λογισμό μεταβολών, στη γεωμετρική οπτική, στο βέλτιστο έλεγχο ή σε διαφορικά παίγνια. Εδώ η $u = u(x,t)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, Du = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\Big),$$

όπου H και u είναι πραγματικές συναρτήσεις και $\lambda \geq 0$ είναι σταθερά. Ονομάζουμε την συνάρτηση H χαμιλτονιανή. Στον λογισμό μεταβολών και στην γεωμετρική οπτική έχουμε χαμιλτονιανές της μορφής

$$H(x,p) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) p_i p_j - V(x),$$

όπου $\Big(a_{ij}(x)\Big)_{1 \leq i,j \leq N} \geq 0$.

Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου ορίζεται ως εξής: Έστω $B \subset \mathbb{R}^m$ ένα συμπαγές υποσύνολο και $g : \mathbb{R}^N \times B \to \mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R}^N \times B \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Έστω

$$A = \{\alpha : \ \alpha : [0, +\infty) \to B, \ \text{μετρήσιμη}\}.$$

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} X'(t) = g\Big(X(t), \alpha(t)\Big) & (t > 0) \\ X(0) = x \end{cases}$$

για $x \in \mathbb{R}^N$ και $\alpha \in A$. Έστω $X(t; x, \alpha)$ η λύση του προβλήματος. Επίσης ορίζουμε

$$\begin{aligned} J(x,\alpha) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f\Big(X(t;x,\alpha), \alpha(t)\Big)\, dt, \\ V(x) &= \inf\{J(x,\alpha) : \alpha \in A\}, \end{aligned}$$

όπου $\lambda \geq 0$ είναι σταθερά. Ζητάμε:
(i) Να βρούμε ένα $\alpha \in A$ ώστε $V(x) = J(x,\alpha)$.
(ii) Να βρούμε το $V(x)$.
Στην ορολογία του βέλτιστου ελέγχου, η Σ.Δ.Ε. του προβλήματος καλείται

εξίσωση κατάστασης(δυναμική), το J καλείται **συναρτησιακό κόστος**, το λ είναι ο **παράγοντας έκπτωσης**, η f καλείται **τρέχον κόστος**, ενώ η V καλείται **συνάρτηση αξίας**. Το $\alpha \in A$ καλείται **έλεγχος** και, εάν ικανοποιεί την $V(x) = J(x,\alpha)$, τότε ονομάζεται **βέλτιστος έλεγχος**. Για να είναι καλά ορισμένα τα J και V υποθέτουμε ότι
$(A1)$ Υπάρχει μία σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|f(x,\alpha)| \leq M, \quad |g(x,\alpha)| \leq M, \quad |f(x,\alpha) - f(y,\alpha)| \leq M|x-y|, \quad |g(x,\alpha) - g(y,\alpha)| \leq M|x-y|$,
$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha \in A$.

$(A2)$ $\lambda > 0$.
Οι χαμιλτονιανές που εμφανίζονται στα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου έχουν την μορφή
$$H(x,p) = \max_{a \in A} \{-g(x,a) \cdot p - f(x,a)\}.$$
Υποθέτοντας τις $(A1)$ και $(A2)$ έχουμε ότι η V είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}^N$, δηλαδή $V \in BUC(\mathbb{R}^N)$, και είναι λύση ιξώδους (βλέπε παρακάτω) της
$$\lambda u + H(x, Du) = 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N.$$
Αυτή η εξίσωση ονομάζεται **εξίσωση Bellman** του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου και η V χαρακτηρίζεται ως η μοναδική λύση αυτής.
Μία άλλη κατηγορία χαμιλτονιανών είναι αυτές των διαφορικών παιγνίων, οι οποίες έχουν την μορφή
$$H(x,p) = \min_{\beta \in B} \max_{\alpha \in A} \{-g(x,\alpha,\beta) \cdot p - f(x,\alpha,\beta)\}.$$

Στην περίπτωση των εξισώσεων Hamilton-Jacobi δεν αναμένουμε εν γένει κλασσική λύση. Ζητάμε συνήθως λύσεις που είναι το πολύ συνεχείς, οπότε η λύση μας θα πρέπει να ορισθεί με κάποια ασθενή έννοια. Ένας συνήθης τρόπος στην θεωρία των μη γραμμικών Μ.Δ.Ε. ορισμού «ασθενών λύσεων» είναι αυτός των κατανομών. Η βασική ιδέα εκεί είναι της μεταφοράς της διαφορικής λειτουργίας από τις λύσεις σε βοηθητικές συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά μέρη. Ο τρόπος αυτός φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.
Παράδειγμα: Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών για βαθμωτούς νόμους διατήρησης στην μία διάσταση του χώρου
$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{12}$$
Εδώ, οι $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δεδομένες συναρτήσεις και η $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι η άγνωστη του προβλήματος. Εν γένει δεν υπάρχει κάποια λεία λύση του (12), οπότε ψάχνουμε για κάποιο είδος ασθενούς λύσης. Συγκεκριμένα εισάγουμε την συνάρτηση $v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι η v είναι λεία, με συμπαγή φορέα. Καλουμε την v συνάρτηση δοκιμής ή

ελέγχου. Τώρα, πολλαπλασιάζουμε την Μ.Δ.Ε. $u_t + F(u)_x = 0$ επί v και ολοκληρώνουμε κατά μέρη, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(u_t + F(u)_x\Big) v dx dt \\ &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t \, dx dt - \int_{-\infty}^\infty u v dx|_{t=0} - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u) v_x \, dx dt. \end{aligned}$$

Λόγω της αρχικής συνθήκης $u = g$ στο $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$, προκύπτει τελικά η ταυτότητα

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t + F(u) v_x dx dt + \int_{-\infty}^\infty g v dx|_{t=0} = 0 \qquad (13)$$

Η ισότητα αυτή παρήχθη υποθέτοντας ότι η u είναι λεία λύση του (12), αλλά ο τελικός τύπος έχει νόημα ακόμα και αν υποτεθεί ότι η u είναι τοπικά ολοκληρώσιμη. Τελικά, λέμε ότι η $u \in L^\infty\Big(\mathbb{R} \times (0, \infty)\Big)$ είναι μία ολοκληρωτική λύση του (12), αν η ισότητα (13) ισχύει για κάθε συνάρτηση δοκιμής.

Αν η θεωρούμενη εξίσωση έχει την μορφή απόκλισης, τότε είναι εύκολη η εφαρμογή αυτής της ιδέας. Όμως οι εξισώσεις Hamilton-Jacobi δεν έχουν την μορφή απόκλισης.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το, αντίστοιχο με το (12), πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t + F(u_x) = 0 & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η παραπάνω πρακτική δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ.

Η δεύτερη προφανής ιδέα ορισμού «ασθενούς λύσης» είναι αυτή της απόλυτα συνεχούς λύσης που ικανοποιεί την δοσμένη εξίσωση σχεδόν παντού. Απλά παραδείγματα, όμως, δείχνουν ότι αυτό δεν είναι αρκετό για εξασφάλιση της μοναδικότητας:

Παράδειγμα: Για N=1 θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - |Du| = 0 & \text{σχεδόν παντού στο} \quad \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις $u = 0$ και $u = \max\{0, t - |x|\} = \max\Big\{0, \min\{t - x, t + x\}\Big\}$ ικανοποιούν τις απαιτήσεις μας.

Μία καλή απάντηση στο πρόβλημα της μοναδικότητας δόθηκε στην δεκαετία του 60 (π.χ. βλέπε [Flem], στην περίπτωση όπου η $p \to H(t, x, p)$ είναι κυρτή). Στην απαίτηση ότι η λύση πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση σχεδόν παντού, προστέθηκε η απαίτηση κατά την οποία θα πρέπει να είναι ημικοίλη. Η ημικοιλότητα της $u(x, t)$ στο $\mathbb{R}^N$ σημαίνει ότι η ανισότητα

$$u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t) \leq C|h|^2$$

ισχύει $\forall x, h \in \mathbb{R}^N$, $\forall t \in (0, +\infty)$, για κάποιο $C > 0$. Αυτή η έννοια ασθενούς λύσης ήταν, ομοίως, επιτυχής στην ύπαρξη των λύσεων. Όμως, για την ύπαρξη τέτοιων ασθενών λύσεων απαιτούνται αυστηρές υποθέσεις ομαλότητας για τις χαμιλτονιανές και για τα αρχικά δεδομένα. Η υπόθεση που απαιτείται ιδιαίτερα είναι η κυρτότητα των χαμιλτονιανών. Αυτή, όμως, δεν ισχύει, π.χ. για τις χαμιλτονιανές των εξισώσεων των διαφορικών παιγνίων.

Το πρόβλημα αυτό λύθηκε με την εισαγωγή της έννοιας της λύσης ιξώδους (στην αρχή της δεκαετίας του 1980) (βλέπε π.χ. [CIL], [Bar]). Με την έννοια αυτή επιλύεται το πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των εξισώσεων Hamilton-Jacobi, συμπεριλαμβανομένων αυτών των διαφορικών παιγνίων, όπου η χαμιλτονιανή δεν είναι κατ'ανάγκη κυρτή ή κοίλη. Η λύση ιξώδους οδήγησε στον ευσταθή αριθμητικό υπολογισμό των αντίστοιχων προβλημάτων.

Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Παρακάτω θα ορίσουμε τις λύσεις ιξώδους της εξίσωσης

$$H(x,u,Du) = 0 \quad \text{στο} \quad \Omega. \tag{14}$$

Θα υποθέσουμε ότι η H είναι συνεχής.

Ορισμός 2.1 *Έστω η συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $y \in \Omega$. Ορίζουμε τα σύνολα*
$D^+u(y) = \{p \in \mathbb{R}^N : u(x) \leq u(y) + p \cdot (x-y) + o(|\, x-y \,|) \quad \text{καθώς} \quad x \to y\}$,

$D^-u(y) = \{p \in \mathbb{R}^N : u(x) \geq u(y) + p \cdot (x-y) + o(|\, x-y \,|) \quad \text{καθώς} \quad x \to y\}$,
όπου $o(r)/r \to 0$ καθώς το $r \to 0$.

Το σύνολο $D^+u(y)$ καλείται ***υπερδιαφορικό*** *και το $D^-u(y)$* ***υποδιαφορικό*** *της u στο y.*

Εύκολα φαίνεται ότι αν η u είναι διαφορίσιμη στο y τότε $D^+u(y) = D^-u(y) = \{Du(y)\}$, ενώ, αν $D^+u(y) \bigcap D^-u(y) \neq \emptyset$ τότε η u είναι διαφορίσιμη στο y.

Πρόταση 2.1 *(i) $p \in D^+u(y)$ αν και μόνον αν υπάρχει $\phi \in C^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $D\phi(y) = p$ και η $u - \phi$ έχει ένα τοπικό μέγιστο στο y.*
(ii) $p \in D^-u(y)$ αν και μόνον αν υπάρχει $\phi \in C^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $D\phi(y) = p$ και η $u - \phi$ έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο y.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε την κατεύθυνση ($\Leftarrow$) για το (i). Το ανάπτυγμα *Taylor* πρώτης τάξης της $\phi(x)$ στο σημείο y μας δίνει:

$$\phi(x) = \phi(y) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y) \cdot (x_i - y_i) + R(x-y,y),$$

όπου $\frac{R(x-y,y)}{|x-y|} \to 0$ καθώς $|x-y| \to 0$, άρα $R(x-y,y) = o(|x-y|)$.
Επομένως

$$\phi(x) = \phi(y) + D\phi(y) \cdot (x-y) + o(|x-y|).$$

Η $u - \phi$ έχει τοπικό μέγιστο στο y, άρα

$$(u-\phi)(x) \leq (u-\phi)(y) \quad \forall x \in B(y,\epsilon) \Rightarrow u(x)-u(y) \leq \phi(x)-\phi(y) \quad \forall x \in B(y,\epsilon),$$

για κάποιο $\epsilon > 0$.
Επομένως προκύπτει ότι

$$u(x) - u(y) \leq D\phi(y) \cdot (x - y) + o(|x - y|) \quad \forall x \in B(y, \epsilon)$$

και καθώς $D\phi(y) = p$, προκύπτει ότι $p \in D^+u(y)$.

Αποδεικνύουμε την κατεύθυνση $(\Rightarrow)$ για το (i). Έστω $p \in D^+u(y)$.
Εξ' ορισμού,
$u(x) \leq u(y) + p \cdot (x - y) + \omega(|x - y|)|x - y| \quad \forall x \in B(y, \delta)$,
για κάποιο $\delta > 0$ και για $\omega \in C([0, \infty))$ που ικανοποιεί την $\omega(0) = 0$.
Μπορούμε να θεωρήσουμε την ω αύξουσα. Ορίζουμε

$$\rho(r) = \int_0^r \omega(s) ds \quad \text{για} \quad r \geq 0.$$

Προφανώς $\rho \in C^1\left([0, \infty)\right), \quad \rho(0) = \rho'(0) = 0$ και

$$\rho(2r) \geq \int_r^{2r} \omega(s) ds \geq \omega(r) r.$$

Θέτοντας $\phi(x) = u(y) + p \cdot (x - y) + \rho(2|x - y|)$, βλέπουμε ότι
$\phi \in C^1(\mathbb{R}^N), \quad D\phi(y) = p$ και

$$(u - \phi)(y) = 0 = \max_{x \in B(y, \delta)} (u - \phi)(x),$$

αφού $\phi(x) \geq u(y) + p \cdot (x - y) + \omega(|x - y|)|x - y| \geq u(x), \quad \forall x \in B(y, \delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow (u - \phi)(x) \leq 0 \quad \forall x \in B(y, \delta)$.

Το $(ii, \Leftarrow)$ είναι παρόμοιο με το $(i, \Leftarrow)$.

Για το $(ii, \Rightarrow)$ αρκεί η απλή παρατήρηση ότι

$$D^-u(y) = -\left(D^+(-u)(y)\right)$$

και η εφαρμογή του $(i, \Rightarrow)$ στη $-u$. $\square$

Ορισμός 2.2 *Έστω η συνάρτηση $u \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Τότε*
(i) καλούμε την u ***υπολύση ιξώδους*** *της (14) (ή λύση ιξώδους της $H(x, u, Du) \leq 0$) αν*

$$H(x, u(x), p) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, \forall p \in D^+u(x).$$

(ii) καλούμε την u ***υπερλύση ιξώδους*** *της (14) (ή λύση ιξώδους της $H(x, u, Du) \geq 0$) αν*

$$H(x, u(x), p) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \forall p \in D^-u(x).$$

(iii) καλούμε την u ***λύση ιξώδους*** *της (14) αν είναι υπολύση και υπερλύση ιξώδους της (14).*

Πρόταση 2.2 *Έστω συνάρτηση* $u \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
(i) Η u *είναι υπολύση ιξώδους της (14)* $\Leftrightarrow \forall \phi \in C^1(\Omega)$ *και για κάθε σημείο τοπικού μεγίστου* y *της* $u - \phi$,

$$H\left(y, u(y), D\phi(y)\right) \leq 0.$$

(ii) Η u *είναι υπερλύση ιξώδους της (14)* $\Leftrightarrow \forall \phi \in C^1(\Omega)$ *και για κάθε σημείο τοπικού ελαχίστου* y *της* $u - \phi$,

$$H\left(y, u(y), D\phi(y)\right) \geq 0.$$

Είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 2.1. $\square$

Η επόμενη πρόταση εξηγεί τον λόγο για τον οποίο οι ασθενείς λύσεις μας καλούνται λύσεις ιξώδους.

Πρόταση 2.3 *Για* $\epsilon > 0$ *έστω* $H_\epsilon \in C\left(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\right)$ *και έστω* $u_\epsilon \in C^2(\Omega)$ *είναι λύση της*

$$-\epsilon \Delta u_\epsilon + H_\epsilon\left(x, u_\epsilon, Du_\epsilon\right) \leq 0 \quad \textit{στο} \quad \Omega.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποια $u, H \in C$,

$$\begin{aligned} u_\epsilon \to u \quad &\textit{στο} \quad C(\Omega), \\ H_\epsilon \to H \quad &\textit{στο} \quad C\left(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\right), \end{aligned}$$

καθώς το $\epsilon \to 0$*. Τότε η* u *είναι υπολύση ιξώδους της (14).*

Απόδειξη: Έστω $\phi \in C^2(\Omega)$, $y \in \Omega$ ένα αυστηρό τοπικό μέγιστο της $u - \phi$. Για αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ η $u_\epsilon - \phi$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο y_ϵ κοντά στο y. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_\epsilon \to y$ καθώς το $\epsilon \to 0$. Έχουμε:

$$-\Delta\left(u_\epsilon - \phi\right)\left(y_\epsilon\right) \geq 0, \qquad D\left(u_\epsilon - \phi\right)\left(y_\epsilon\right) = 0.$$

Επομένως

$$-\epsilon \Delta \phi\left(y_\epsilon\right) + H_\epsilon\Big(y_\epsilon, u_\epsilon\left(y_\epsilon\right), D\phi\left(y_\epsilon\right)\Big) \leq 0.$$

Στέλνοντας $\epsilon \to 0$ παίρνουμε $H\Big(y, u(y), D\phi(y)\Big) \leq 0$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αυτή η ανισότητα είναι αληθής $\forall \phi \in C^1(\Omega)$. Επιλέγουμε $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C^2(\Omega)$ ώστε

$$\phi_j \to \phi \quad \text{στο} \quad C^1(\Omega) \quad \text{καθώς το} \quad j \to \infty.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι y είναι ένα σημείο αυστηρού τοπικού μεγίστου της $u - \phi$. Ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι παρόμοιος με τον προηγούμενο. Για μεγάλο $j \in \mathbb{N}$, η $u - \phi_j$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο y_j. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_j \to y$. Τότε έχουμε

$$H\Big(y_j, u(y_j), D\phi_j(y_j)\Big) \leq 0,$$

όπως είδαμε πιο πάνω. Στέλνοντας $j \to \infty$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη.□

Παρατήρηση: Το τελευταίο μισό της παραπάνω απόδειξης δείχνει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την συνθήκη $\phi \in C^1(\Omega)$ από την $\phi \in C^\infty(\Omega)$ στην πρόταση 2.2.

Ένας παρόμοιος ισχυρισμός με τον προηγούμενο αποδεικνύει την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.4 *Έστω οι ακολουθίες* $\{u_r\} \subset C(\Omega)$, $\{H_r\} \subset C\left(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\right)$ *και* u_r *μια λύση ιξώδους της* $H_r(x, u_r, Du_r) = 0$ *στο* Ω. *Υποθέτουμε ότι, καθώς το* $r \to \infty$,

$$\begin{aligned} u_r \to u \quad & \textit{στο} \quad C(\Omega), \\ H_r \to H \quad & \textit{στο} \quad C\left(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\right), \end{aligned}$$

για κάποιες $u, H \in C$. *Τότε η* u *είναι λύση ιξώδους της (14).* □

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το πρόβλημα μοναδικότητας για τις λύσεις ιξώδους των εξισώσεων Hamilton-Jacobi (βλέπε [Bar]).

Θεωρούμε την εξίσωση

$$H(x, u, Du) = 0 \quad \text{στο} \quad \Omega, \tag{15}$$

όπου Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και η $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Θα κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις για την H:

(H1) $$H(x,u,p) - H(x,v,p) \geq \gamma_R(u - v), \qquad (\gamma_R > 0)$$
$\forall x \in \Omega, -R \leq v \leq u \leq R$ και $p \in \mathbb{R}^N$ $\quad (\forall\, 0 < R < +\infty)$.

(H2) $$|H(x,u,p) - H(y,u,p)| \leq m_R\Big(|x - y|(1 + |p|)\Big),$$
όπου $m_R(t) \to 0$ όταν $t \to 0, \forall x, y \in \Omega, -R \leq u \leq R$ και $p \in \mathbb{R}^N$
$(\forall\, 0 < R < +\infty)$.

Θεώρημα 2.1 *Αν οι* $u, v \in C(\overline{\Omega})$ *είναι, αντίστοιχα, υπολύση και υπερλύση της (15) και* $u \leq v$ *στο* $\partial\Omega$, *τότε ισχύει:*

$$u \leq v \quad \textit{στο} \quad \overline{\Omega}.$$

Παρατήρηση Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί την λεγόμενη Αρχή Σύγκρισης. Από αυτήν προκύπτει άμεσα η ύπαρξη μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος Dirichlet της (15) με συνοριακή συνθήκη

$$u = \phi \quad \text{στο} \quad \partial\Omega. \tag{16}$$

Έστω ότι u_1, u_2 είναι λύσεις του προβλήματος στο $\overline{\Omega}$, όπου $u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega})$. Ειδικότερα η u_1 είναι υπολύση και η u_2 υπερλύση. Ισχύει $u_1 = u_2 = \phi$ στο $\partial\Omega$, άρα και $u_1 \leq u_2$ στο $\partial\Omega$ οπότε, από την Αρχή Σύγκρισης

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}.$$

Με αντιστροφή των ρόλων των u_1, u_2 παίρνουμε

$$u_2 \leq u_1 \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega},$$

άρα τελικά

$$u_1 = u_2 \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}.$$

Πόρισμα 2.1 *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.1, αν $u, v \in C(\overline{\Omega})$ και είναι, αντίστοιχα, υπολύση και υπερλύση της (15), τότε ισχύει*

$$\max_{\overline{\Omega}} (u - v)^+ \leq \max_{\partial\Omega} (u - v)^+.$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$C = \max_{\partial\Omega} (u - v)^+.$$

Η v είναι υπερλύση της (15) άρα $H(x, v, Dv) \geq 0$. Για την $v + C$ έχουμε, λόγω της ιδιότητας (H1):

$$\begin{aligned} H\Big(x, v + C, D(v + C)\Big) &= H(x, v + C, Dv) \\ &\geq H(x, v, Dv) + \gamma_R\Big((v + C) - v\Big) \\ &= H(x, v, Dv) + \gamma_R \cdot C \\ &\geq 0\,, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \Omega$ και για $0 < R < +\infty$. Άρα η $v + C$ είναι υπερλύση της (15). Προφανώς ισχύει $u - v \leq C$ στο $\partial\Omega \Rightarrow u \leq v + C$ στο $\partial\Omega$. Επομένως, από την Αρχή Σύγκρισης,

$$u \leq v + C \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}.$$

Άρα $u - v \leq C$ στο $\overline{\Omega}$, οπότε

$$\max_{\overline{\Omega}} (u - v)^+ \leq \max_{\partial\Omega} (u - v)^+. \qquad \square$$

Παρατήρηση: Η ισχύς του Θεωρήματος 2.1 αποδεικνύεται άμεσα, αν οι u, v είναι τάξης C^1 στο Ω και συνεχείς στο $\partial\Omega$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\max_{\overline{\Omega}}(u - v) \leq 0.$$

Έστω ότι το μέγιστο επιτυγχάνεται στο σημείο x_0. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Έστω $x_0 \in \partial\Omega$. Τότε $u(x_0) \leq v(x_0) \Rightarrow (u - v)(x_0) \leq 0$, επομένως

$$\max_{\overline{\Omega}}(u - v) \leq 0.$$

2. Έστω $x_0 \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι

$$\max_{\overline{\Omega}}(u - v) > 0.$$

Δηλαδή έχουμε ότι $(u - v)(x_0) > 0$. Το σημείο μεγίστου x_0 είναι εσωτερικό σημείο, άρα

$$D(u - v)(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Du(x_0) = Dv(x_0).$$

Οι u, v είναι, αντίστοιχα, υπολύση και υπερλύση της (15), άρα

$$H\Big(x_0, u(x_0), Du(x_0)\Big) \leq 0 \quad , \quad H\Big(x_0, v(x_0), Dv(x_0)\Big) \geq 0.$$

Από τις σχέσεις αυτές και την ισότητα των κλίσεων έχουμε

$$H\Big(x_0, u(x_0), Du(x_0)\Big) - H\Big(x_0, v(x_0), Du(x_0)\Big) \leq 0.$$

Για $R = \max\Big(||u||_\infty, ||v||_\infty\Big)$ και θέτοντας $\gamma = \gamma_R$, από την ιδιότητα (H1), λόγω του ότι $u(x_0) > v(x_0)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma\Big((u(x_0) - v(x_0)\Big) \\ &\leq H\Big(x_0, u(x_0), Du(x_0)\Big) - H\Big(x_0, v(x_0), Du(x_0)\Big) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Επομένως και εδώ παίρνουμε

$$\max_{\overline{\Omega}}(u - v) \leq 0.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1: Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$M = \max_{\overline{\Omega}}(u - v) \leq 0.$$

Υποθέτουμε ότι $M > 0$. Έχουμε ότι ισχύει $u \leq v$ στο $\partial\Omega$, άρα το μέγιστο δεν επιτυγχάνεται στο σύνορο. Η ιδέα, εδώ, αφορά την χρήση της μεθόδου «διπλασιασμού των μεταβλητών». Εισάγουμε τη συνάρτηση

$$\psi_\epsilon(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}.$$

Η πρόσθεση του «όρου ποινής» $\frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}$ έχει ως αποτέλεσμα, αφ'ενός μεν ότι $x \approx y$, αφ'ετέρου το γεγονός ότι το μέγιστο της ψ_ϵ, έστω M_ϵ, είναι κοντά στο μέγιστο M της $u - v$.
Η ισχύς αυτής της ιδέας φαίνεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.1 *Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. $M_\epsilon \to M$ *καθώς* $\epsilon \to 0$.

2. *Αν* (x_ϵ, y_ϵ) *είναι το σημείο μεγίστου της* ψ_ϵ, *τότε:*

$$\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \to 0 \quad \textit{καθώς} \quad \epsilon \to 0,$$
$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \to M \quad \textit{καθώς} \quad \epsilon \to 0.$$

3. $x_\epsilon, y_\epsilon \in \Omega$ *για* ϵ *αρκετά μικρό.*

Υποθέτουμε ότι ισχύει το παραπάνω λήμμα (το οποίο θα αποδειχτεί αργότερα). Αν (x_ϵ, y_ϵ) είναι το σημείο μεγίστου της ψ_ϵ, τότε το x_ϵ είναι το σημείο μεγίστου της συνάρτησης

$$x \to u(x) - \phi^1_\epsilon(x),$$

όπου

$$\phi^1_\epsilon(x) = v(y_\epsilon) + \frac{|x - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}.$$

Η u είναι υπολύση ιξώδους της (15) και $x_\epsilon \in \Omega$ άρα

$$H\Big(x_\epsilon, u(x_\epsilon), D\phi^1_\epsilon(x_\epsilon)\Big) = H\Big(x_\epsilon, u(x_\epsilon), \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\Big) \leq 0.$$

Ομοίως, το y_ϵ είναι το σημείο μεγίστου της συνάρτησης

$$y \to -v(y) + \phi^2_\epsilon(y),$$

όπου

$$\phi^2_\epsilon(y) = u(x_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y|^2}{\epsilon^2}.$$

Επομένως, το y_ϵ είναι σημείο ελαχίστου της συνάρτησης $v - \phi^2_\epsilon$.
Η v είναι υπερλύση ιξώδους της (15) και $y_\epsilon \in \Omega$, άρα

$$H\Big(y_\epsilon, v(y_\epsilon), D\phi^2_\epsilon(y_\epsilon)\Big) = H\Big(y_\epsilon, v(y_\epsilon), \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\Big) \geq 0.$$

Από τις δύο παραπάνω ανισότητες προκύπτει

$$H\Big(x_\epsilon, u(x_\epsilon), \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\Big) - H\Big(y_\epsilon, v(y_\epsilon), \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\Big) \le 0.$$

Θέτοντας

$$p_\epsilon = \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}$$

και προσθαφαιρώντας τον όρο $H\Big(x_\epsilon, v(y_\epsilon), p_\epsilon\Big)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} & H\Big(x_\epsilon, u(x_\epsilon), p_\epsilon\Big) - H\Big(x_\epsilon, v(y_\epsilon), p_\epsilon\Big) \\ \le \;& H\Big(y_\epsilon, v(y_\epsilon), p_\epsilon\Big) - H\Big(x_\epsilon, v(y_\epsilon), p_\epsilon\Big) \end{aligned} \tag{17}$$

Τώρα: αν $u(x_\epsilon) < v(y_\epsilon)$ τότε

$$M_\epsilon = \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) = u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \le 0,$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Όμως $M_\epsilon \to M > 0$ όταν $\epsilon \to 0$, άρα $M_\epsilon > 0$ για αρκετά μικρό ϵ, κάτι που αποτελεί άτοπο.
Επομένως

$$u(x_\epsilon) \ge v(y_\epsilon).$$

Για $R = \max\Big(||u||_\infty, ||v||_\infty\Big)$ και θέτοντας $\gamma = \gamma_R$ και $m = m_R$, από τις ιδιότητες (H1) και (H2), η (17) γίνεται

$$\gamma\Big(u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon)\Big) \le m\Big(|x_\epsilon - y_\epsilon|(1 + |p_\epsilon|)\Big).$$

Από την παραπάνω εξίσωση, έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma M_\epsilon &= \gamma \cdot \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \\ &= \gamma\Big(u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}\Big) \\ &= \gamma\Big((u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon)\Big) - \gamma\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \\ &\le m\Big(|x_\epsilon - y_\epsilon|(1 + |p_\epsilon|)\Big) - \gamma\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \\ &= m\Big(|x_\epsilon - y_\epsilon| + \frac{2|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}\Big) - \gamma\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το ϵ να τείνει στο 0 και με χρήση του λήμματος, προκύπτει ότι

$$\gamma M \le 0,$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Επομένως η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, άρα $M \leq 0$, δηλαδή

$$\max_{\overline{\Omega}}(u - v) \leq 0. \qquad \square$$

Απόδειξη του Λήμματος 2.1: Αν (x_ϵ, y_ϵ) είναι το σημείο μεγίστου της ψ_ϵ, τότε, $\forall x, y \in \overline{\Omega}$ έχουμε:

$$u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\epsilon^2} \leq u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} = M_\epsilon.$$

Επιλέγοντας $x = y$ παίρνουμε

$$u(x) - v(x) \leq M_\epsilon \qquad \forall x \in \overline{\Omega},$$

επομένως, παίρνοντας μέγιστο ως προς x,

$$M \leq \ M_\epsilon.$$

Εκ των υποθέσεων έχουμε ότι $-R \leq u, v \leq R$, όπου $R \in (0, +\infty)$, άρα

$$M \leq u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \leq 2R - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}.$$

Έχουμε υποθέσει ότι $M > 0$, επομένως

$$\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \leq 2R.$$

Εισάγουμε το m_v, το οποίο καλείται μέτρο συνέχειας της v και ορίζεται ως εξής:

$$m_v(t) = \sup_{|x-y| \leq t} |v(x) - v(y)|.$$

Η v, ως συνεχής στο $\overline{\Omega}$, είναι και ομοιόμορφα συνεχής, οπότε $m_v(t) \to 0$ όταν $t \to 0$. Χρησιμοποιώντας το μέτρο συνέχειας της v έχουμε:

$$\begin{aligned} M \leq M_\epsilon &= u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \\ &\leq u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \\ &= u(x_\epsilon) + v(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - v(x_\epsilon) \\ &\leq u(x_\epsilon) + \sup_{|x-y| \leq |x_\epsilon - y_\epsilon|} |v(x) - v(y)| - v(x_\epsilon) \\ &= u(x_\epsilon) - v(x_\epsilon) + m_v(|x_\epsilon - y_\epsilon|) \\ &\leq M + m_v(|x_\epsilon - y_\epsilon|). \end{aligned}$$

Από την εκτίμηση του «όρου ποινής» που έγινε πριν, παίρνουμε:

$$|x_\epsilon - y_\epsilon| \leq \sqrt{2R} \cdot \epsilon.$$

Έτσι έχουμε

$$M \leq M_\epsilon \leq M + m_v(|x_\epsilon - y_\epsilon|) \leq M + m_v(\sqrt{2R} \cdot \epsilon).$$

Παίρνοντας $\epsilon \to 0$ στα δύο μέλη προκύπτει το πρώτο σημείο του λήμματος, δηλαδή ότι $M_\epsilon \to M$ όταν $\epsilon \to 0$.
Έχουμε την ανισότητα

$$M_\epsilon = u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \leq u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \leq M + m_v(\sqrt{2R} \cdot \epsilon).$$

Απο αυτήν παίρνουμε ότι, όταν $\epsilon \to 0$ το $u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \to M,$ αφού και το M_ϵ και το $M + m_v(\sqrt{2R} \cdot \epsilon)$ τείνουν στο M.
Επιπλέον, $M_\epsilon = u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}$ και αφού το M_ϵ και το $u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon)$ τείνουν στο M καθώς $\epsilon \to 0$ αναγκαστικά θα έχουμε ότι $\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \to 0$ καθώς $\epsilon \to 0$.
Για το τρίτο μέρος του λήμματος, υποθέτουμε ότι $x_\epsilon \in \partial\Omega$. Τότε

$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \leq u(x_\epsilon) - v(x_\epsilon) + m_v(|x_\epsilon - y_\epsilon|) \leq m_v(|x_\epsilon - y_\epsilon|) \leq m_v(\sqrt{2R} \cdot \epsilon),$$

αφού ισχύει $u \leq v$ στο $\partial\Omega \Rightarrow u - v \leq 0$ στο $\partial\Omega$. Ισχύει $M \leq u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon)$, επομένως $M \leq m_v(\sqrt{2R} \cdot \epsilon)$. Όμως $m_v(\sqrt{2R} \cdot \epsilon) \to 0$ καθώς $\epsilon \to 0$ άρα υπάρχει κάποιο ϵ αρκετά μικρό, για το οποίο να ισχύει $m_v(\sqrt{2R} \cdot \epsilon) < M$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Άρα $x_\epsilon \notin \partial\Omega \Rightarrow x_\epsilon \in \Omega$, για ϵ αρκετά μικρό. Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε ότι και $y_\epsilon \in \Omega$, για ϵ αρκετά μικρό. $\square$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι

$(H3)$ $\quad H(x, u, p) \to +\infty$ καθώς το $|p| \to +\infty$,
ομοιόμορφα ως προς $x \in \Omega,\ u \in [-R, R]$ $\quad (\forall\, 0 < R < +\infty)$.

Λήμμα 2.2 *Αν ισχύει η ιδιότητα $(H3)$ και η u είναι υπολύση της (15) και συνεχής στο $\overline{\Omega}$, τότε η u ανήκει στο $W^{1,\infty}(\Omega)$.*

Απόδειξη: Έστω $x \in \Omega$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει K αρκετά μεγάλο (το οποίο εξαρτάται από το x) ώστε να ισχύει:

$$\forall y \in \overline{\Omega}, \quad u(y) - K|y - x| \leq u(x). \tag{18}$$

Θεωρούμε το

$$\max_{\overline{\Omega}}\Big(u(y) - K|y - x|\Big).$$

Παίρνοντας $K > \frac{2||u||_\infty}{d(x, \partial\Omega)}$, το μέγιστο δεν μπορεί να βρίσκεται στο σύνορο του Ω. Έστω $y \in \partial\Omega$. Τότε ισχύει

$$u(y) - K|y - x| \leq u(y) - Kd(x, \partial\Omega) < u(y) - 2||u||_\infty \leq -||u||_\infty \leq u(x),$$

επομένως

$$\max_{\partial\Omega}\Big(u(y)-K|y-x|\Big) < u(x) \leq \max_{\overline{\Omega}}\Big(u(y)-K|y-x|\Big).$$

Άρα το μέγιστο βρίσκεται στο Ω. Υποθέτουμε ότι το μέγιστο λαμβάνεται στο σημείο $y \neq x \in \Omega$. Τότε, λόγω του ότι η u είναι υπολύση της (15), θα ισχύει

$$H\Big(y, u(y), K\frac{y-x}{|y-x|}\Big) \leq 0.$$

Όμως, για K αρκετά μεγάλο, λόγω της ιδιότητας $(H3)$, θα έχουμε ότι $H\Big(y, u(y), K\frac{y-x}{|y-x|}\Big) > 0$, κάτι που αποτελεί άτοπο. Επομένως,

$$\max_{\overline{\Omega}}\Big(u(y)-K|y-x|\Big) = u(x)$$

και η (18) ισχύει.
Το αποτέλεσμα είναι αληθές για κάθε $x \in \Omega$ και η εξάρτηση του K απο το x έχει ως αποτέλεσμα η u να είναι τοπικά Lipschitz συνεχής στο Ω. Αλλά τότε, από το Θεώρημα του Rademacher, η u είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο Ω, οπότε ισχύει

$$H\Big(x, u(x), Du(x)\Big) \leq 0 \quad \text{σχεδόν παντού στο} \quad \Omega.$$

Λόγω της ιδιότητας $(H3)$ προκύπτει ότι $Du \in L^{\infty}(\Omega)$, δηλαδή $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. $\square$

3 Περιοδική ομογενοποίηση

Το βασικό πρόβλημα είναι το εξής: Αν η u_ϵ είναι λύση ιξώδους της παρακάτω εξίσωσης

$$F\Big(D^2u^\epsilon, Du^\epsilon, u^\epsilon, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) = 0,$$

όπου η μη γραμμική F είναι περιοδική ως προς το τελευταίο όρισμα, ζητάμε να δείξουμε ότι οι λύσεις u^ϵ συγκλίνουν, καθώς το ϵ πηγαίνει στο 0, στη λύση u μίας ενεργούσας(effective) οριακής Μ.Δ.Ε, της μορφής

$$\overline{F}(D^2u, Du, u, x) = 0.$$

Οι βασικές δυσκολίες παρουσιάζονται, αφ'ενός μεν στην κατασκευή και στον αριθμητικό υπολογισμό της $\overline{F}$, αφ'ετέρου στην αυστηρή δικαιολόγηση της σύγκλισης (για λεπτομέρειες, βλέπε [Ev1]).
Ειδικεύοντας τα παραπάνω στην περίπτωση εξισώσεων Hamilton-Jacobi, θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα-μοντέλο:

$$\begin{cases} H\Big(Du^\epsilon, u^\epsilon, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) = 0 & \text{στο} \quad \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{στο} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{19}$$

όπου το Ω παριστάνει ένα φραγμένο λείο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και η $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ είναι μία δοσμένη λεία συνάρτηση. Η βασική μας υπόθεση είναι ότι

$$\text{η απεικόνιση} \quad y \to H(p,u,x,y) \quad \text{είναι} \quad Y-\text{περιοδική} \tag{20}$$

για κάθε p, u, x, όπου $Y \equiv [0,1]^n$ ο μοναδιαίος κύβος στο $\mathbb{R}^N$. Απαιτούμε, επίσης, να ισχύουν τα εξής:

$$\lim_{|p|\to\infty} H(p,u,x,y) = +\infty, \text{ ομοιόμορφα στο } B(0,L)\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N,\ \forall L > 0, \tag{21}$$

$$u \to H(p,u,x,y) - \mu u \quad \text{αύξουσα} \tag{22}$$

για κάποιο $\mu > 0$ και για όλα τα p, x, y, και

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{η } H \text{ είναι } Lipschitz \text{ συνεχής στο} \\ B(0,L)\times B(0,L)\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N,\ \forall L > 0. \end{array} \right. \tag{23}$$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ η $u^\epsilon \in C(\overline{\Omega})$ είναι μία λύση ιξώδους της (19). Έστω τυχαίο ϵ, με $0 < \epsilon < 1$. Θεωρούμε τυχαίο αριθμό $M_1 > 0$ και σταθερό αριθμό $M_2 < 0$. Λόγω της ιδιότητας (22) έχουμε ότι ισχύει

$$H\Big(0, M_1, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) - H\Big(0, M_2, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) \geq \mu(M_1 - M_2)$$

ή

$$H\Big(0, M_1, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) \geq H\Big(0, M_2, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) + \mu(M_1 - M_2).$$

Για M_1 αρκετά μεγάλο ισχύει

$$H\Big(0, M_2, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) + \mu(M_1 - M_2) \geq 0,$$

δηλαδή

$$H\Big(0, M_1, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) \geq 0.$$

Άρα, αυτό το M_1 είναι υπερλύση ιξώδους της (19). Η u^ϵ είναι υπολύση ιξώδους της (19) (ως λύση ιξώδους αυτής) και $u^\epsilon = 0 \leq M_1$ στο $\partial\Omega$. Επομένως, από την Αρχή Σύγκρισης προκύπτει ότι

$$u^\epsilon \leq M_1 \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}. \tag{24}$$

Θεωρούμε τυχαίο αριθμό $M_3 < 0$ και σταθερό αριθμό $M_4 > 0$. Λόγω της (22) έχουμε, όπως πριν, ότι ισχύει

$$H\Big(0, M_3, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) \leq H\Big(0, M_4, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) + \mu(M_3 - M_4).$$

Για M_3 αρκετά μικρό ισχύει

$$H\Big(0, M_4, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) + \mu(M_3 - M_4) \leq 0,$$

δηλαδή

$$H\Big(0, M_3, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) \le 0.$$

Άρα, αυτό το M_3 είναι υπολύση ιξώδους της (19). Η u^ϵ είναι υπερλύση ιξώδους της (19) (ως λύση ιξώδους αυτής) και $u^\epsilon = 0 \ge M_3$ στο $\partial\Omega$. Επομένως, από την Αρχή Σύγκρισης προκύπτει ότι

$$u^\epsilon \ge M_3 \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}. \tag{25}$$

Από τις σχέσεις (24) και (25) προκύπτει ότι

$$|u^\epsilon| \le M \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega},$$

για το τυχαίο ϵ, με $0 < \epsilon < 1$, όπου $M = \max\{|M_1|, |M_3|\}$. Άρα, ισχύει

$$|u^\epsilon| \le M \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}, \quad \forall \epsilon \in (0,1). \tag{26}$$

Λόγω των υποθέσεων (21), (22), του Λήμματος 2.2 και της σχέσης (26), προκύπτει ότι

$$\sup_{0<\epsilon<1} ||u^\epsilon||_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} < \infty,$$

όπου

$$||u^\epsilon||_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u^\epsilon(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\ne y}} \frac{|u^\epsilon(x) - u^\epsilon(y)|}{|x-y|}.$$

Άρα, λόγω του Θεωρήματος Arzela-Ascoli, υπάρχει μία υπακολουθία $\{u^{\epsilon_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ και μία συνάρτηση $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ ώστε

$$u^{\epsilon_j} \to u \quad \text{ομοιόμορφα στο } \overline{\Omega}, \text{ καθώς το } \epsilon_j \to 0.$$

Ζητάμε να βρούμε μία Hamilton-Jacobi εξίσωση, της οποίας η u θα είναι ασθενής λύση ιξώδους.

Πρόταση 3.1 *Για καθορισμένα $p \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$ και $x \in \overline{\Omega}$, υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός λ για τον οποίο η Μ.Δ.Ε.*

$$\begin{cases} H(D_y v + p, u, x, y) = \lambda & \text{στο } \mathbb{R}^N \\ v \quad Y - \text{περιοδική}, \end{cases} \tag{27}$$

έχει μοναδική λύση ιξώδους $v \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$.

Απόδειξη: 1. Δεδομένων $p \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$ και $x \in \overline{\Omega}$, θεωρούμε για κάθε $\delta > 0$ την προσεγγιστική Μ.Δ.Ε.

$$\delta w^\delta + H(D_y w^\delta + p, u, x, y) = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^N. \tag{28}$$

Λόγω των υποθέσεων για την H, εφαρμόζοντας την Αρχή Σύγκρισης των λύσεων ιξώδους στην (28) (αν οι $w^\delta, \tilde{w}^\delta \in C(\mathbb{R}^N)$ είναι, αντίστοιχα, υπολύση

και υπερλύση της (28), τότε ισχύει $w^\delta \leq \tilde{w}^\delta$ στο $\mathbb{R}^N$) προκύπτει ότι η (28) έχει μία μοναδική Lipschitz συνεχή λύση ιξώδους w^δ και, ιδιαίτερα, η μοναδικότητα καθιστά την w^δ $Y-$περιοδική.
Έστω $c_1 \in \mathbb{R}$ σταθερά. Υποθέτουμε ότι η $w^\delta - c_1$ παρουσιάζει μέγιστο στο Y στο σημείο $y_1 \in Y$. Η w^δ είναι υπολύση ιξώδους της (28) (ως λύση ιξώδους αυτής) άρα

$$\delta w^\delta(y_1) + H(p,u,x,y_1) \leq 0.$$

Έστω $\delta \in (0,1)$. Έστω $y \in Y$. Τότε έχουμε:

$$\delta w^\delta(y) \leq \delta w^\delta(y_1) \leq -H(p,u,x,y_1) \leq ||H(p,u,x,\cdot)||_{L^\infty(Y)}.$$

Άρα

$$\delta w^\delta(y) \leq ||H(p,u,x,\cdot)||_{L^\infty(Y)} \quad \forall y \in Y. \tag{29}$$

Έστω $c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερά. Υποθέτουμε ότι η $w^\delta - c_2$ παρουσιάζει ελάχιστο στο Y στο σημείο $y_2 \in Y$. Η w^δ είναι υπερλύση ιξώδους της (28) (ως λύση ιξώδους αυτής) άρα

$$\delta w^\delta(y_2) + H(p,u,x,y_2) \geq 0.$$

Έστω $y \in Y$. Τότε έχουμε:

$$\delta w^\delta(y) \geq \delta w^\delta(y_2) \geq -H(p,u,x,y_2) \geq -||H(p,u,x,\cdot)||_{L^\infty(Y)}.$$

Άρα

$$\delta w^\delta(y) \geq -||H(p,u,x,\cdot)||_{L^\infty(Y)} \quad \forall y \in Y. \tag{30}$$

Από τις σχέσεις (29) και (30) προκύπτει ότι

$$|\delta w^\delta(y)| \leq ||H(p,u,x,\cdot)||_{L^\infty(Y)} \quad \forall y \in Y.$$

Άρα,

$$||\delta w^\delta||_{L^\infty(Y)} = \sup_{y\in Y} |\delta w^\delta(y)| \leq ||H(p,u,x,\cdot)||_{L^\infty(Y)}.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για το τυχαίο δ ,$0 < \delta < 1$, που έχουμε επιλέξει, άρα ισχύει $\forall \delta \in (0,1)$. Επομένως,

$$\sup_{0<\delta<1} ||\delta w^\delta||_{L^\infty(Y)} \leq ||H(p,u,x,\cdot)||_{L^\infty(Y)}. \tag{31}$$

Η $H(p,u,x,y)$ είναι Lipschitz συνεχής ως προς y και το Y είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, άρα

$$||H(p,u,x,\cdot)||_{L^\infty(Y)} < \infty. \tag{32}$$

Άρα, από τις σχέσεις (31) και (32) προκύπτει ότι

$$\sup_{0<\delta<1} ||\delta w^\delta||_{L^\infty(Y)} < \infty. \tag{33}$$

Επομένως, από την (28),

$$\sup_{0<\delta<1} ||H(D_y w^\delta + p, u, x, y)||_{L^\infty(Y)} < \infty.$$

Άρα, λόγω της ιδιότητας (21), προκύπτει ότι

$$\sup_{0<\delta<1} ||Dw^\delta||_{L^\infty(Y)} < \infty. \tag{34}$$

Θέτουμε

$$v^\delta = w^\delta - \min_Y w^\delta.$$

Η v^δ είναι Y-περιοδική για κάθε $0 < \delta < 1$ και, από τις σχέσεις (33) και (34), έχουμε

$$\sup_{0<\delta<1} ||v^\delta||_{C^{0,1}(Y)} < \infty. \tag{35}$$

Από τις σχέσεις (33) και (35) προκύπτει ότι υπάρχει μία υπακολουθία $\left\{(v^{\delta_j}, \delta_j w^{\delta_j})\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \left\{(v^\delta, \delta w^\delta)\right\}_{0<\delta<1}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \delta_j \to 0, & \\ v^{\delta_j} \to v & \text{ομοιόμορφα στο} \quad \mathbb{R}^N, \\ \delta_j w^{\delta_j} \to -\lambda & \text{ομοιόμορφα στο} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{36}$$

για κάποια συνάρτηση $v \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$, όπου η v είναι Y-περιοδική, και για κάποια σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$. Περνώντας σε όρια, υπό την έννοια του ιξώδους, στην (28), προκύπτει ότι το ζευγάρι (v, λ) επιλύει την (27).

2. Για να δείξουμε την μοναδικότητα του λ, υποθέτουμε ότι το ζευγάρι $(\hat{v}, \hat{\lambda})$ επιλύει την

$$\begin{cases} H(D_y \hat{v} + p, u, x, y) = \hat{\lambda} \quad \text{στο} \;\; \mathbb{R}^N \\ \hat{v} \quad Y - \text{περιοδική} \end{cases} \tag{37}$$

Έστω $\hat{\lambda} > \lambda$. Προσθέτοντας μία σταθερά στη v, αν είναι αναγκαίο, μπορούμε να υποθέσουμε επίσης ότι

$$v > \hat{v} \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N. \tag{38}$$

Για ϵ αρκετά μικρό, ισχύει

$$-\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{2} \leq \epsilon \hat{v} < \epsilon v \leq \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{2}.$$

Θεωρούμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi

$$\epsilon \tilde{v} + H(D_y \tilde{v} + p, u, x, y) = \frac{\hat{\lambda} + \lambda}{2} \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N. \tag{39}$$

Τώρα, έχουμε:

$$\epsilon\hat{v} + H(D_y\hat{v} + p, u, x, y) \geq -\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{2} + \hat{\lambda} = \frac{\hat{\lambda} + \lambda}{2},$$

υπό την έννοια του ιξώδους, άρα η $\hat{v}$ είναι υπερλύση ιξώδους της (39). Ενώ,

$$\epsilon v + H(D_y v + p, u, x, y) \leq \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{2} + \lambda = \frac{\hat{\lambda} + \lambda}{2},$$

υπό την έννοια του ιξώδους, άρα η v είναι υπολύση ιξώδους της (39). Εφαρμόζοντας την Αρχή Σύγκρισης στην εξίσωση (39) για τις v και $\hat{v}$, προκύπτει τελικά ότι

$$\hat{v} \geq v \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N,$$

κάτι που αποτελεί άτοπο στην (38). Άρα το ζευγάρι που επιλύει την (27) είναι μοναδικό. $\square$

Για να παρουσιάσουμε άμεσα την εξάρτηση του λ από τα p, u και x, θα γράφουμε από εδώ και στο εξής:

$$\lambda \equiv \overline{H}(p, u, x) \qquad (p \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}, x \in \overline{\Omega}), \tag{40}$$

ορίζοντας, με αυτόν τον τρόπο, την **ενεργή Χαμιλτονιανή** $\overline{H}$. Έτσι, το πρόβλημα κελλιού (27) γίνεται

$$\begin{cases} H(D_y v + p, u, x, y) = \overline{H}(p, u, x) & \text{στο } \mathbb{R}^N \\ v \quad Y-\text{περιοδική}. \end{cases} \tag{41}$$

Στη συνέχεια καταγράφουμε κάποιες ιδιότητες της $\overline{H}$, οι οποίες μεταφέρονται σε αυτήν μέσω της H.

Πρόταση 3.2 *(a)* $\lim_{|p|\to\infty} \overline{H}(p, u, x) = +\infty$, *ομοιόμορφα στο* $B(0, L) \times \overline{\Omega}$, *για κάθε* $L > 0$.
(b) Η απεικόνιση $u \to \overline{H}(p, u, x) - \mu u$ *είναι αύξουσα, για κάθε* p, x.
(c) Η συνάρτηση $\overline{H}$ *είναι Lipschitz συνεχής στο* $B(0, L) \times B(0, L) \times \overline{\Omega}$, *για κάθε* $L > 0$.
(d) Αν η H *είναι κυρτή ως προς το* p, *τότε ισχύει το ίδιο και για την* $\overline{H}$.

Απόδειξη: (a) Θεωρούμε σταθερό $M > 0$. Έστω $c_1 \in \mathbb{R}$ σταθερά. Υποθέτουμε ότι η $w^\delta - c_1$ παρουσιάζει μέγιστο στο Y στο σημείο $y_o \in Y$. Η w^δ είναι υπολύση ιξώδους της (28) (ως λύση ιξώδους αυτής) άρα

$$\delta w^\delta(y_o) + H(p, u, x, y_o) \leq 0.$$

Από την υπόθεση (21) παίρνουμε ότι, για αρκετά μεγάλο $|p|$,

$$H(p, u, x, y_o) \geq M,$$

άρα
$$M+\delta w^\delta(y_o)\le 0 \quad \text{ή} \quad -\delta w^\delta(y_o)\ge M,$$
για $|p|$ αρκετά μεγάλο. Αφήνοντας το δ να τείνει στο μηδέν και, από τις (36) και (40), βρίσκουμε ότι
$$\overline{H}(p,u,x)\ge M,$$
αν το $|p|$ είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό αποδεικνύει την ιδιότητα (a).
(b) Έστω $\hat{u}\ge u,\ \delta>0$, η w^δ επιλύει την (28) και η $\hat{w}^\delta$ επιλύει την
$$\delta\hat{w}^\delta+H(D_y\hat{w}^\delta+p,\hat{u},x,y)=0 \ \text{ στο } \ \mathbb{R}^N.$$
Έστω ότι η $(w^\delta-\hat{w}^\delta)(y)$ έχει ελάχιστο στο σημείο $y_o\in Y$, δηλαδή
$$M=\min_Y(w^\delta-\hat{w}^\delta)=(w^\delta-\hat{w}^\delta)(y_o).$$
Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$\psi_\epsilon(x,y)=w^\delta(x)-\hat{w}^\delta(y)+\frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}.$$
Θέτουμε
$$M_\epsilon=\min_{Y\times Y}\Big(\psi_\epsilon(x,y)\Big)=\psi_\epsilon(x_\epsilon,y_\epsilon).$$
Λήμμα 3.1 *Αν (x_ϵ,y_ϵ) είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης ψ_ϵ, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*
$$1. |x_\epsilon-y_\epsilon|\to 0 \qquad\qquad \textit{καθώς} \quad \epsilon\to 0.$$
$$2. w^\delta(x_\epsilon)-\hat{w}^\delta(y_\epsilon)\to M \qquad \textit{καθώς} \quad \epsilon\to 0.$$
Υποθέτουμε ότι ισχύει το παραπάνω λήμμα (το οποίο θα αποδειχτεί αργότερα). Το x_ϵ είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης:
$$x\to w^\delta(x)-\phi^1_\epsilon(x),$$
όπου
$$\phi^1_\epsilon(x)=\hat{w}^\delta(y)-\frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}.$$
Η w^δ είναι υπερλύση ιξώδους της (28), άρα
$$\begin{aligned} & \delta w^\delta(x_\epsilon)+H\Big(D_y\phi^1_\epsilon(x_\epsilon)+p,u,x,x_\epsilon\Big)\\ = \ & \delta w^\delta(x_\epsilon)+H\Big(-\tfrac{2|x_\epsilon-y_\epsilon|}{\epsilon^2},u,x,x_\epsilon\Big)\ge 0. \end{aligned} \tag{42}$$
Το y_ϵ είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης
$$y\to -\hat{w}^\delta(y)+\phi^2_\epsilon(y),$$

όπου

$$\phi_\epsilon^2(y) = w^\delta(x) + \frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}.$$

Επομένως, το y_ϵ είναι σημείο μεγίστου της συνάρτησης

$$y \to \hat{w}^\delta(y) - \phi_\epsilon^2(y).$$

Η $\hat{w}^\delta$ είναι υπολύση ιξώδους της (28), άρα

$$\delta\hat{w}^\delta(y_\epsilon) + H\Big(-\frac{2|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon^2}, \hat{u}, x, y_\epsilon\Big) \leq 0. \tag{43}$$

Έστω $p_\epsilon = -\frac{2|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon^2}$. Από τις (42) και (43) προκύπτει ότι

$$\delta\hat{w}^\delta(y_\epsilon) + H(p_\epsilon, \hat{u}, x, y_\epsilon) \leq \delta w^\delta(x_\epsilon) + H(p_\epsilon, u, x, x_\epsilon).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη το $-H(p_\epsilon, u, x, y_\epsilon)$, οπότε, με χρήση των ιδιοτήτων (22) και (23) παίρνουμε

$$\delta\hat{w}^\delta(y_\epsilon) + \mu(\hat{u} - u) \leq \delta w^\delta(x_\epsilon) + C|x_\epsilon - y_\epsilon|,$$

όπου $C > 0$ σταθερά. Άρα

$$\delta\Big(w^\delta(x_\epsilon) - \hat{w}^\delta(y_\epsilon)\Big) + C|x_\epsilon - y_\epsilon| \geq \mu(\hat{u} - u).$$

Παίρνοντας $\epsilon \to 0$ και με χρήση του λήμματος και της Y-περιοδικότητας των w^δ, $\hat{w}^\delta$, προκύπτει

$$\begin{array}{lll} & \delta M + 0 \geq \mu(\hat{u} - u) & \\ \Rightarrow & \mu(\hat{u} - u) \leq \delta \min_Y (w^\delta - \hat{w}^\delta) \leq \delta(w^\delta - \hat{w}^\delta)(y) & \forall y \in Y \\ \Rightarrow & \mu(\hat{u} - u) \leq \delta\Big(w^\delta(y) - \hat{w}^\delta(y)\Big) & \forall y \in \mathbb{R}^N \\ \Rightarrow & -\delta\hat{w}^\delta(y) \geq -\delta w^\delta(y) + \mu(\hat{u} - u) & \forall y \in \mathbb{R}^N \\ \Rightarrow & -\delta\hat{w}^\delta \geq -\delta w^\delta + \mu(\hat{u} - u) & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Στέλνοντας το δ στο μηδέν, παίρνουμε

$$\overline{H}(p, \hat{u}, x) \geq \overline{H}(p, u, x) + \mu(\hat{u} - u),$$

το οποίο αποδεικνύει το (b). Μένει να αποδείξουμε το λήμμα. Ισχύει ότι

$$\psi_\epsilon(x, y) \geq \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \quad \forall x, y \in Y.$$

Για $x = y$ έχουμε

$$w^\delta(x) - \hat{w}^\delta(x) \geq \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \quad \forall x \in Y.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
M &= \min_Y \Big(w^\delta(x) - \hat{w}^\delta(x) \Big) \\
&\geq \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \\
&= w^\delta(x_\epsilon) - \hat{w}^\delta(y_\epsilon) + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \\
&\geq \min_{Y\times Y} \Big(w^\delta(x) - \hat{w}^\delta(y) \Big) + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \\
\Rightarrow \epsilon^2 M &\geq \epsilon^2 \min_{Y\times Y} \Big(w^\delta(x) - \hat{w}^\delta(y) \Big) + |x_\epsilon - y_\epsilon|^2.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας $\epsilon \to 0$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
& 0 \geq 0 + \lim_{\epsilon\to 0} |x_\epsilon - y_\epsilon|^2 \\
\Rightarrow \quad & |x_\epsilon - y_\epsilon| \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Για το δεύτερο μέρος του λήμματος, με χρήση της ιδιότητας (23), από την οποία προκύπτει ότι η $\hat{w}^\delta$ είναι Lipschitz συνεχής, έχουμε:

$$\begin{aligned}
M &= \min_Y (w^\delta - \hat{w}^\delta) \geq \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \\
&= w^\delta(x_\epsilon) - \hat{w}^\delta(y_\epsilon) + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \\
&\geq w^\delta(x_\epsilon) - \hat{w}^\delta(y_\epsilon) \\
&= w^\delta(x_\epsilon) - \hat{w}^\delta(x_\epsilon) + \hat{w}^\delta(x_\epsilon) - \hat{w}^\delta(y_\epsilon) \\
&\geq (w^\delta - \hat{w}^\delta)(x_\epsilon) + (-C|x_\epsilon - y_\epsilon|) \\
&\geq \min_Y (w^\delta - \hat{w}^\delta) - C|x_\epsilon - y_\epsilon| \\
&= M - C|x_\epsilon - y_\epsilon|,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$M \geq w^\delta(x_\epsilon) - \hat{w}^\delta(y_\epsilon) \geq M - C|x_\epsilon - y_\epsilon|.$$

Παίρνοντας $\epsilon \to 0$ προκύπτει, με χρήση του 1 του λήμματος:

$$w^\delta(x_\epsilon) - \hat{w}^\delta(y_\epsilon) \to M \quad \text{καθώς} \quad \epsilon \to 0.$$

(c) Θεωρούμε $p, \hat{p} \in \mathbb{R}^N,\ u, \hat{u} \in \mathbb{R},\ x, \hat{x} \in \Omega$ με $|p|, |\hat{p}|, |u|, |\hat{u}| \leq L$. Έστω w^δ η λύση της (28) και $\hat{w}^\delta$ η λύση της

$$\delta \hat{w}^\delta + H(D_y \hat{w}^\delta + \hat{p}, \hat{u}, \hat{x}, y) = 0 \quad \text{στο} \ \mathbb{R}^N.$$

Λόγω της ιδιότητας (23) έχουμε

$$H(q + \hat{p}, \hat{u}, \hat{x}, y) \leq H(q + p, u, x, y) + C(|p - \hat{p}| + |u - \hat{u}| + |x - \hat{x}|),$$

για κάθε q, y με $|q| \leq L'$ και για κάποια σταθερά $C = C(L, L')$. Για $q = D_y\hat{w}^\delta$ παίρνουμε

$$\delta\hat{w}^\delta + H(D_y\hat{w}^\delta + p, u, x, y) \geq -C(|p-\hat{p}| + |u-\hat{u}| + |x-\hat{x}|) \quad \text{στο } \mathbb{R}^N, \tag{44}$$

με την ασθενή έννοια ιξώδους. Θεωρούμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi

$$\delta v + H(D_y v + p, u, x, y) + C(|p-\hat{p}| + |u-\hat{u}| + |x-\hat{x}|) = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^N. \tag{45}$$

Από την (44) προκύπτει ότι η $\hat{w}^\delta$ είναι υπερλύση ιξώδους της (45). Θεωρούμε, επίσης, την εξίσωση

$$\delta v + H(D_y v + p, u, x, y) - C(|p-\hat{p}| + |u-\hat{u}| + |x-\hat{x}|) = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^N. \tag{46}$$

Από την (28) προκύπτει ότι η w^δ είναι υπολύση ιξώδους της (46). Έστω ότι η $(\hat{w}^\delta - w^\delta)$ έχει ελάχιστο στο σημείο $y_o \in Y$, δηλαδή

$$M = \min_Y(\hat{w}^\delta - w^\delta) = (\hat{w}^\delta - w^\delta)(y_o).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi_\epsilon(x, y) = \hat{w}^\delta(x) - w^\delta(y) + \frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}.$$

Θέτουμε

$$M_\epsilon = \min_{Y\times Y}\Big(\psi_\epsilon(x, y)\Big) = \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon).$$

Το x_ϵ είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης

$$x \to \hat{w}^\delta(x) - \phi^1_\epsilon(x),$$

όπου

$$\phi^1_\epsilon(x) = w^\delta(y) - \frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}.$$

Η $\hat{w}^\delta$ είναι υπερλύση ιξώδους της (45), άρα

$$\delta\hat{w}^\delta(x_\epsilon) + H\Big(-\frac{2|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon^2} + p, u, x, x_\epsilon\Big) + C(|p-\hat{p}| + |u-\hat{u}| + |x-\hat{x}|) \geq 0. \tag{47}$$

Το y_ϵ είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης

$$y \to -w^\delta(y) + \phi^2_\epsilon(y),$$

όπου

$$\phi^2_\epsilon(y) = \hat{w}^\delta(x) + \frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}.$$

Επομένως, το y_ϵ είναι σημείο μεγίστου της συνάρτησης

$$y \to w^\delta(y) - \phi^2_\epsilon(y).$$

Η w^δ είναι υπολύση ιξώδους της (46), άρα

$$\delta w^\delta(y_\epsilon)+H\Big(-\frac{2|x_\epsilon-y_\epsilon|}{\epsilon^2}+p,u,x,y_\epsilon\Big)-C(|p-\hat{p}|+|u-\hat{u}|+|x-\hat{x}|)\leq 0. \quad (48)$$

Έστω $p_\epsilon=-\frac{2|x_\epsilon-y_\epsilon|}{\epsilon^2}$ και $R=C(|p-\hat{p}|+|u-\hat{u}|+|x-\hat{x}|)$. Από τις (47) και (48) προκύπτει ότι

$$\delta w^\delta(y_\epsilon)+H(p_\epsilon+p,u,x,y_\epsilon)-R\leq\delta\hat{w}^\delta(x_\epsilon)+H(p_\epsilon+p,u,x,x_\epsilon)+R.$$

Επομένως, έχουμε

$$\delta\hat{w}^\delta(x_\epsilon)-\delta w^\delta(y_\epsilon)+H(p_\epsilon+p,u,x,x_\epsilon)-H(p_\epsilon+p,u,x,y_\epsilon)\geq-2R.$$

Από την ιδιότητα (23) έχουμε

$$\delta\Big(\hat{w}^\delta(x_\epsilon)-w^\delta(y_\epsilon)\Big)+C|x_\epsilon-y_\epsilon|\geq-2R.$$

Παίρνοντας $\epsilon\to 0$ και με χρήση του Λήμματος 3.1 και της Y-περιοδικότητας των $w^\delta,\hat{w}^\delta$ προκύπτει

$$\begin{array}{lll} & \delta M+0\geq-2R & \\ \Rightarrow & -2R\leq\delta\min_Y(\hat{w}^\delta-w^\delta)\leq\delta(\hat{w}^\delta-w^\delta)(y) & \forall y\in Y \\ \Rightarrow & -2R\leq\delta(\hat{w}^\delta-w^\delta)(y) & \forall y\in\mathbb{R}^N \\ \Rightarrow & \delta w^\delta-\delta\hat{w}^\delta\leq C_1(|p-\hat{p}|+|u-\hat{u}|+|x-\hat{x}|) & \text{στο}\quad\mathbb{R}^N, \end{array}$$

όπου $C_1=2C>0$, μία σταθερά. Παίρνοντας το όριο $\delta\to 0$ προκύπτει

$$\overline{H}(\hat{p},\hat{u},\hat{x})-\overline{H}(p,u,x)\leq C_1(|p-\hat{p}|+|u-\hat{u}|+|x-\hat{x}|).$$

Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε και την σχέση

$$\overline{H}(\hat{p},\hat{u},\hat{x})-\overline{H}(p,u,x)\geq-C_1(|p-\hat{p}|+|u-\hat{u}|+|x-\hat{x}|).$$

Από αυτές προκύπτει η ζητούμενη

$$|\overline{H}(\hat{p},\hat{u},\hat{x})-\overline{H}(p,u,x)|\leq C_1(|p-\hat{p}|+|u-\hat{u}|+|x-\hat{x}|).$$

(d) Υποθέτουμε ότι η H είναι κυρτή ως προς το p. Για δοσμένα $p,\ q\in\mathbb{R}^N,\ u\in\mathbb{R},\ x\in\Omega$, έστω ότι $v^p,\ v^q,\ v^{\frac{(p+q)}{2}}$ είναι οι $Y-$περιοδικές λύσεις ιξώδους των Μ.Δ.Ε.

$$\left\{\begin{array}{l} H(D_yv^p+p,u,x,y)=\overline{H}(p,u,x), \\ H(D_yv^q+q,u,x,y)=\overline{H}(q,u,x)\quad\text{στο}\quad\mathbb{R}^N, \\ H\Big(D_yv^{\frac{(p+q)}{2}}+\frac{p+q}{2},u,x,y\Big)=\overline{H}\Big(\frac{p+q}{2},u,x\Big). \end{array}\right.$$

Αφαιρώντας μία σταθερά από την $v^{\frac{(p+q)}{2}}$, εάν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$v^{\frac{(p+q)}{2}}<\frac{1}{2}v^p+\frac{1}{2}v^q\quad\text{στο}\quad\mathbb{R}^N. \quad (49)$$

Για να πάρουμε στη συνέχεια άτοπο, ας υποθέσουμε ότι ισχύει

$$\overline{H}\Big(\frac{p+q}{2}, u, x\Big) > \frac{1}{2}\overline{H}(p,u,x) + \frac{1}{2}\overline{H}(q,u,x). \tag{50}$$

Ισχυριζόμαστε, τώρα, ότι ισχύει

$$H\Big(D_y\Big(\frac{v^p+v^q}{2}\Big) + \frac{p+q}{2}, u, x, y\Big) \leq \frac{1}{2}\overline{H}(p,u,x) + \frac{1}{2}\overline{H}(q,u,x) \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N, \tag{51}$$

με την ασθενή έννοια. Για να φανεί αυτό, θέτουμε

$$w \equiv \frac{v^p+v^q}{2}.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ως εξής:

$$\eta(x) := \begin{cases} Cexp\Big(\frac{1}{|x|^2-1}\Big), & \text{αν } |x| < 1 \\ 0, & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

όπου η σταθερά $C > 0$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε $\int_{\mathbb{R}^N} \eta dx = \int_{B(0,1)} \eta dx = 1$. Για κάθε $\epsilon > 0$, θέτουμε

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big).$$

Καλούμε την η τον δεδομένο εξομαλυντή (βλέπε π.χ. [Ev2]). Οι συναρτήσεις η_ϵ είναι C^∞ και ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\epsilon dx = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon dx = 1.$$

Οριζουμε, τώρα, την συνάρτηση $w_\epsilon = \eta_\epsilon * w$, δηλαδή

$$w_\epsilon(y) = \int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(y-z)w(z)dz.$$

Με χρήση της κυρτότητας της H ως προς το p, της ανισότητας του Jensen και των παραπάνω, έχουμε

$$\begin{aligned} H\Big(D_y w_\epsilon + \frac{p+q}{2}, u, x, y\Big) &\leq \int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(y-z) H\Big(D_y w(z) + \frac{p+q}{2}, u, x, y\Big) dz \\ &= \int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(y-z) H\Big(D_y w(z) + \frac{p+q}{2}, u, x, z\Big) dz + o(1) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(y-z) H(D_y v^p(z) + p, u, x, z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(y-z) H(D_y v^q(z) + q, u, x, z) dz + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\overline{H}(p,u,x) + \frac{1}{2}\overline{H}(q,u,x) + o(1) \end{aligned}$$

καθώς το $\epsilon \to 0$. Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω του ότι οι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις v^p και v^q επιλύουν τις Μ.Δ.Ε. τους σχεδόν παντού. Στέλνοντας το ϵ στο 0, αποδεικνύουμε την σχέση (51).
Θεωρούμε, τώρα, την Hamilton-Jacobi εξίσωση

$$H\Big(D_y v + \frac{p+q}{2}, u, x, y\Big) = \frac{1}{2}\overline{H}(p,u,x) + \frac{1}{2}\overline{H}(q,u,x) \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N. \tag{52}$$

Η $\frac{v^p+v^q}{2}$ είναι υπολύση ιξώδους της (52), λόγω της (51). Η $v^{\frac{(p+q)}{2}}$ είναι υπερλύση ιξώδους της (52), λόγω της (50). Επιπλέον, $\frac{v^p+v^q}{2}$, $v^{\frac{(p+q)}{2}} \in C(\mathbb{R}^N)$, άρα, από την Αρχή Σύγκρισης προκύπτει ότι

$$\frac{v^p + v^q}{2} \leq v^{\frac{(p+q)}{2}} \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N,$$

κάτι που είναι άτοπο στην (49). $\square$

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η ενεργή Χαμιλτονιανή $\overline{H}$ καθορίζει την οριακή Μ.Δ.Ε. για τα απότομης ταλάντωσης προβλήματά μας (19).

Θεώρημα 3.1 *Υποθέτουμε ότι η H ικανοποιεί τις ιδιότητες (20)-(23). Τότε η u είναι η μοναδική λύση ιξώδους του*

$$\begin{cases} \overline{H}(Du,u,x) = 0 & \textit{στο} \quad \Omega, \\ u = 0 & \textit{στο} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{53}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε $\phi \in C^\infty(\Omega)$ και υποθέτουμε ότι η $u - \phi$ έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_o \in \Omega$, με

$$u(x_o) = \phi(x_o).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\overline{H}\Big(D\phi(x_o), \phi(x_o), x_o\Big) \leq 0. \tag{54}$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει

$$\overline{H}\Big(D\phi(x_o), \phi(x_o), x_o\Big) \equiv \theta > 0. \tag{55}$$

Θέτουμε $p = D\phi(x_o)$, $u = \phi(x_o)$, $x = x_o$ στην (41) και επιλέγουμε $v \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$ να είναι λύση ιξώδους της

$$\begin{cases} H\Big(D_y v + D\phi(x_o), \phi(x_o), x_o, y\Big) = \overline{H}\Big(D\phi(x_o), \phi(x_o), x_o\Big) = \theta \quad \text{στο } \mathbb{R}^N, \\ v \quad Y-\text{περιοδική}. \end{cases} \tag{56}$$

Ορίζουμε, τώρα, τη διαταραγμένη συνάρτηση ελέγχου

$$\phi^\epsilon(x) \equiv \phi(x) + \epsilon \cdot v\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ^ϵ είναι Lipschitz συνεχής, αλλά όχι C^1. Διατυπώνουμε τον ισχυρισμό ότι

$$H\Big(D\phi^\epsilon(x), \phi^\epsilon(x), x, \frac{x}{\epsilon}\Big) \geq \frac{\theta}{2} \quad \text{στο } B(x_o, r), \tag{57}$$

με την έννοια του ιξώδους, για κάποια αρκετά μικρή ακτίνα $r > 0$, που θα επιλεγεί παρακάτω (εδώ το $B(x_o, r)$ συμβολίζει την ανοιχτή σφαίρα με κέντρο x_o και ακτίνα r). Για να φανεί αυτό, επιλέγουμε τυχαία $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ και υποθέτουμε ότι η $\phi^\epsilon - \psi$ έχει ελάχιστο σε ένα σημείο $x_1 \in B(x_o, r)$, με

$$\phi^\epsilon(x_1) = \psi(x_1).$$

Τότε η απεικόνιση

$$x \to \epsilon v\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big) - [\psi(x) - \phi(x)]$$

έχει ελάχιστο στο x_1. Διαιρώντας με ϵ και θέτοντας $y = \frac{x}{\epsilon}$ παίρνουμε ότι η απεικόνιση

$$y \to v(y) - \eta(y)$$

έχει ελάχιστο στο σημείο $y_1 \equiv \frac{x_1}{\epsilon}$, όπου

$$\eta(y) \equiv \frac{1}{\epsilon}\Big(\psi(\epsilon y) - \phi(\epsilon y)\Big). \tag{58}$$

Η v είναι υπερλύση ιξώδους της (56) (ως λύση ιξώδους αυτής) άρα

$$H\Big(D\eta(y_1) + D\phi(x_o), \phi(x_o), x_o, y_1\Big) \geq \theta. \tag{59}$$

Λόγω της (58) παίρνουμε

$$D\eta(y_1) = D\psi(\epsilon y_1) - D\phi(\epsilon y_1) = D\psi(x_1) - D\phi(x_1),$$

άρα, η (59) γίνεται

$$H\Big(D\psi(x_1) + D\phi(x_o) - D\phi(x_1), \phi(x_o), x_o, \frac{x_1}{\epsilon}\Big) \geq \theta.$$

Μπορούμε να πάρουμε $r > 0$ αρκετά μικρό, ώστε θέτοντας όπου x_o το x_1 στην παραπάνω, να ισχύει

$$H\Big(D\psi(x_1), \psi(x_1), x_1, \frac{x_1}{\epsilon}\Big) \geq \frac{\theta}{2},$$

το οποίο αποδεικνύει την (57). Θεωρούμε, τώρα, την εξίσωση Hamilton-Jacobi

$$H\Big(Dv, v, x, \frac{x}{\epsilon}\Big) = \frac{\theta}{2} \quad \text{στο} \quad B(x_o, r). \tag{60}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $\max_{\partial B(x_o,r)}(u^\epsilon - \phi^\epsilon) \geq 0$. Η ϕ^ϵ είναι υπερλύση ιξώδους της (60), λόγω της

(57) και η u^ϵ είναι υπολύση ιξώδους αυτής, λόγω της (19). Εφαρμόζοντας, τώρα, το πόρισμα 2.1 για αυτήν την περίπτωση, παίρνουμε ότι

$$\max_{\overline{B(x_o,r)}}(u^\epsilon - \phi^\epsilon) \leq \max_{\partial B(x_o,r)}(u^\epsilon - \phi^\epsilon),$$

άρα

$$(u^\epsilon - \phi^\epsilon)(x_o) \leq \max_{\partial B(x_o,r)}(u^\epsilon - \phi^\epsilon).$$

2. $\max_{\partial B(x_o,r)}(u^\epsilon - \phi^\epsilon) < 0$. Έστω ότι η συνάρτηση $(\phi^\epsilon - u^\epsilon)$ έχει ελάχιστο στο σημείο $y_o \in \overline{B(x_o,r)}$, δηλαδή

$$M = \min_{\overline{B(x_o,r)}}(\phi^\epsilon - u^\epsilon) = (\phi^\epsilon - u^\epsilon)(y_o).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi_\delta(x,y) = \phi^\epsilon(x) - u^\epsilon(y) + \frac{|x-y|^2}{\delta^2}.$$

Θέτουμε

$$M_\delta = \min_{\overline{B(x_o,r)}\times\overline{B(x_o,r)}}\Big(\psi_\delta(x,y)\Big) = \psi_\delta(x_\delta, y_\delta).$$

Το x_δ είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης

$$x \to \phi^\epsilon(x) - \phi^1_\delta(x),$$

όπου

$$\phi^1_\delta(x) = u^\epsilon(y) - \frac{|x-y|^2}{\delta^2}.$$

Η ϕ^ϵ είναι υπερλύση ιξώδους της (60), όπως ειπώθηκε, άρα

$$\begin{aligned} &H\Big(D\phi^1_\delta(x_\delta), \phi^\epsilon(x_\delta), x_\delta, \frac{x_\delta}{\epsilon}\Big) \\ &= H\Big(-\frac{2|x_\delta - y_\delta|}{\delta^2}, \phi^\epsilon(x_\delta), x_\delta, \frac{x_\delta}{\epsilon}\Big) \geq \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{61}$$

Το y_δ είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης

$$y \to -u^\epsilon(y) + \phi^2_\delta(y),$$

όπου

$$\phi^2_\delta(y) = \phi^\epsilon(x) + \frac{|x-y|^2}{\delta^2}.$$

Επομένως, το y_δ είναι σημείο μεγίστου της συνάρτησης

$$y \to u^\epsilon(y) - \phi^2_\delta(y).$$

Η u^ϵ είναι υπολύση ιξώδους της (19), ως λύση ιξώδους αυτής, άρα

$$H\Big(-\frac{2|x_\delta - y_\delta|}{\delta^2}, u^\epsilon(y_\delta), y_\delta, \frac{y_\delta}{\epsilon}\Big) \leq 0,$$

ή

$$H\Big(-\frac{2|x_\delta - y_\delta|}{\delta^2}, u^\epsilon(y_\delta), y_\delta, \frac{y_\delta}{\epsilon}\Big) + \frac{\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2}. \tag{62}$$

Έστω $\rho_\delta = -\frac{2|x_\delta - y_\delta|}{\delta^2}$. Από τις σχέσεις (61) και (62) προκύπτει ότι

$$H\Big(\rho_\delta, u^\epsilon(y_\delta), y_\delta, \frac{y_\delta}{\epsilon}\Big) + \frac{\theta}{2} \leq H\Big(\rho_\delta, \phi^\epsilon(x_\delta), x_\delta, \frac{x_\delta}{\epsilon}\Big).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τον όρο $-H\Big(\rho_\delta, \phi^\epsilon(x_\delta), y_\delta, \frac{y_\delta}{\epsilon}\Big)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} &H\Big(\rho_\delta, u^\epsilon(y_\delta), y_\delta, \frac{y_\delta}{\epsilon}\Big) - H\Big(\rho_\delta, \phi^\epsilon(x_\delta), y_\delta, \frac{y_\delta}{\epsilon}\Big) + \frac{\theta}{2} \\ &\leq H\Big(\rho_\delta, \phi^\epsilon(x_\delta), x_\delta, \frac{x_\delta}{\epsilon}\Big) - H\Big(\rho_\delta, \phi^\epsilon(x_\delta), y_\delta, \frac{y_\delta}{\epsilon}\Big). \end{aligned}$$

Λόγω της ιδιότητας (23) προκύπτει ότι

$$-C|u^\epsilon(y_\delta) - \phi^\epsilon(x_\delta)| + \frac{\theta}{2} \leq C\Big(|x_\delta - y_\delta| + \frac{|x_\delta - y_\delta|}{\epsilon}\Big),$$

όπου $C > 0$ σταθερά. Παίρνοντας $\delta \to 0$ και με χρήση του λήμματος 3.1 προκύπτει ότι

$$-C|-M| + \frac{\theta}{2} \leq C(0+0)$$

ή

$$-C|M| + \frac{\theta}{2} \leq 0.$$

Έχουμε υποθέσει ότι $\max_{\partial B(x_o,r)}(u^\epsilon - \phi^\epsilon) < 0$. Από την Αρχή Σύγκρισης προκύπτει ότι $\max_{\overline{B(x_o,r)}}(u^\epsilon - \phi^\epsilon) < 0$, οπότε
$-\min_{\overline{B(x_o,r)}}(\phi^\epsilon - u^\epsilon) < 0$, δηλαδή έχουμε ότι το M είναι θετικό. Άρα,

$$\begin{aligned} -CM + \frac{\theta}{2} \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad -CM \leq -\frac{\theta}{2} \\ &\Rightarrow \quad -C \cdot \Big(-\max_{B(x_o,r)}(u^\epsilon - \phi^\epsilon)\Big) \leq -\frac{\theta}{2} \\ &\Rightarrow \quad C \cdot \max_{B(x_o,r)}(u^\epsilon - \phi^\epsilon) \leq -\frac{\theta}{2} \\ &\Rightarrow \quad (u^\epsilon - \phi^\epsilon)(x) \leq \max_{B(x_o,r)}(u^\epsilon - \phi^\epsilon) \leq -\frac{\theta}{2C} \quad \forall x \in \overline{B(x_o,r)} \\ &\Rightarrow \quad u^\epsilon - \phi^\epsilon \leq -\frac{\theta}{2C} \quad \sigma\tau o \quad \overline{B(x_o,r)}. \end{aligned} \tag{63}$$

Οι u^ϵ, ϕ^ϵ συγκλίνουν ομοιόμορφα στις u, ϕ, αντίστοιχα, και, από υπόθεση, $(u-\phi)(x_o)=0$. Επομένως, το $|\max_{\partial B(x_o,r)}(u^\epsilon-\phi^\epsilon)|$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε, επιλέγοντας μικρό $r>0$. Έτσι, για αρκετά μικρό $\tilde{r}>0$, έχουμε ότι
$$-\frac{\theta}{2C}\leq \max_{\partial B(x_o,\tilde{r})}(u^\epsilon-\phi^\epsilon). \tag{64}$$
Από τις σχέσεις (63) και (64) προκύπτει ότι
$$u^\epsilon-\phi^\epsilon\leq \max_{\partial B(x_o,\tilde{r})}(u^\epsilon-\phi^\epsilon) \quad \text{στο} \quad \overline{B(x_o,\tilde{r})}.$$
Άρα,
$$(u^\epsilon-\phi^\epsilon)(x_o)\leq \max_{\partial B(x_o,\tilde{r})}(u^\epsilon-\phi^\epsilon).$$
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι, για κάποιο αρκετά μικρό $r>0$, ισχύει γενικότερα ότι
$$(u^\epsilon-\phi^\epsilon)(x_o)\leq \max_{\partial B(x_o,r)}(u^\epsilon-\phi^\epsilon).$$
Στέλνουμε το $\epsilon\to 0$ και παίρνουμε
$$(u-\phi)(x_o)\leq \max_{\partial B(x_o,r)}(u-\phi).$$
Αυτό αποτελεί άτοπο στην υπόθεση ότι η $u-\phi$ έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο x_o. Επομένως, η (55) δεν μπορεί να ισχύει και έτσι αποδείχθηκε η (54), δηλαδή ότι η u είναι υπολύση ιξώδους της (53). Με τον ίδιο τρόπο, και υποθέτοντας ότι η $u-\phi$ έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_o\in\Omega$, παίρνουμε ότι η u είναι υπερλύση ιξώδους της (53). Επομένως, λόγω μοναδικότητας, η u είναι η μοναδική λύση ιξώδους της (53). □

Η εύρεση αναπαραστάσεων για την ενεργούσα Χαμιλτονιανή $\overline{H}$ αποτελεί, όπως προειπώθηκε, ανοιχτό πρόβλημα στη γενική περίπτωση. Θα δούμε μία σχετικά απλή περίπτωση, στην οποία προκύπτει, τελικά, μία αναπαράσταση υπολογισμού της $\overline{H}$ (για πιο σύνθετα παραδείγματα, βλέπε [C1]).
Θεωρούμε το κλασσικό πρώτης τάξης πρόβλημα Cauchy για Hamilton-Jacobi εξισώσεις:
$$\begin{cases} u_t^\epsilon + H\Big(Du^\epsilon,\frac{x}{\epsilon}\Big)=0 & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N\times(0,\infty),\\ u^\epsilon=u_o & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N\times\{t=0\},\end{cases} \tag{65}$$
όπου η $H:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ είναι $Y-$περιοδική στο δεύτερο όρισμα. ($Y=[0,1]^N$). Υπό κατάλληλες υποθέσεις, η ακολουθία $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ των λύσεων ιξώδους του (65) συγκλίνει, καθώς το $\epsilon\to 0$, στην λύση ιξώδους u του προβλήματος:
$$\begin{cases} u_t+\overline{H}(Du)=0 & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N\times(0,\infty),\\ u=u_o & \text{στο} \quad \mathbb{R}^N\times\{t=0\}.\end{cases} \tag{66}$$
Η ενεργούσα Χαμιλτονιανή $\overline{H}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ στο (66) ορίζεται μέσω του παρακάτω προβλήματος κελλιού:

Θεώρημα 3.2 *Για κάθε $p \in \mathbb{R}^N$, υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\overline{H}(p)$, ούτως ώστε η μερική διαφορική εξίσωση*

$$H\Big(p + Dv(y), y\Big) = \overline{H}(p) \tag{67}$$

να έχει μία $Y-$περιοδική λύση ιξώδους v.

Κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

(1) Η H είναι Lipschitz συνεχής στο $B(0, R) \times \mathbb{R}^N$ για κάθε θετικό πραγματικό R και, για κάποια σταθερά C ισχύει:

$$|H(p, x) - H(p, y)| \leq C\left[|x - y|(1 + |p|)\right],$$

για όλα τα x, y και p στο $\mathbb{R}^N$,

(2) Η $x \to H(p, x)$ είναι $Y-$περιοδική για κάθε $p \in \mathbb{R}^N$,

(3) $H(p, x) \to +\infty$ καθώς $|p| \to +\infty$, ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}^N$.

Κάτω από αυτές τις υποθέσεις, δεδομένου ότι η u_o είναι φραγμένη, ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}^N$ και $Du_o \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, το αποτέλεσμα της ομογενοποίησης ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι η $\overline{H}$ είναι καλά ορισμένη από το πρόβλημα κελλιού (67) και η ακολουθία $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ των λύσεων ιξώδους του (65) συγκλίνει, καθώς το $\epsilon \to 0$, στη λύση ιξώδους u του (66). Υποθέτουμε, επίσης, ότι η $p \to H(p, x)$ είναι κυρτή για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ και L είναι ο Legendre μετασχηματισμός της, δηλαδή

$$L(q, x) = \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \{p \cdot q - H(p, x)\}.$$

Σταθεροποιούμε τη μεταβλητή $p \in \mathbb{R}^N$ και προσπαθούμε να υπολογίσουμε το $\overline{H}(p)$. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.1, προσεγγίζουμε το πρόβλημα κελλιού με την παρακάτω, σταθερής κατάστασης, εξίσωση:

$$\alpha w^\alpha(y) + H\Big(p + Dw^\alpha(y), y\Big) = 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N. \tag{68}$$

Για κάθε $\alpha > 0$, αυτή η Μ.Δ.Ε. έχει μοναδική λύση ιξώδους w^α και, λόγω μοναδικότητας, η w^α είναι $Y-$περιοδική. Στην απόδειξη της Πρότασης 3.1 είδαμε, επίσης, ότι ισχύει

$$\overline{H}(p) = -\lim_{\alpha \to 0} \alpha w^\alpha, \quad \text{ομοιόμορφα στο} \quad \mathbb{R}^N.$$

Η (68) μπορεί να γραφεί

$$\alpha w^\alpha(y) + \tilde{H}\Big(-Dw^\alpha(y), y\Big) = 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N,$$

όπου $\tilde{H}(v,x) = H(p-v,x)$. Χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις βέλτιστου ελέγχου, μπορούμε να εκφράσουμε την λύση της (68) ως εξής:

$$w^{\alpha}(y) = \inf_{x(\cdot)|x(0)=y} \int_0^{+\infty} \tilde{L}\Big(x'(s), x(s)\Big) e^{-\alpha s} ds. \tag{69}$$

Εδώ, $\tilde{L}(q,x) = \sup_{v\in\mathbb{R}^N}\left\{v\cdot q - \overline{H}(v,x)\right\} = p\cdot q + L(-q,x)$ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της $\tilde{H}$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ως εξής:
Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x'(t) = g\Big(x(t)\Big) & (t>0) \\ x(0) = y \end{cases} \tag{70}$$

για $x\in\mathbb{R}^N$. Συμβολίζουμε την λύση του (70) με $x(t;y)$. Επίσης, αν $g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$, $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, ορίζουμε

$$J(y;x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\cdot f\Big(x(t;y)\Big)dt \tag{71}$$

$$V(y) = \inf_{x(\cdot)|x(0)=y}\{J(y;x)\} \tag{72}$$

Τότε, όπως έχουμε δει, η V είναι λύση ιξώδους της εξής Bellman εξίσωσης του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου (70)-(72):

$$\alpha\cdot u + H(Du,y) = 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N,$$

όπου $H(p,y) = -g(y)\cdot p - f(y)$. Με αυτήν τη μορφή Χαμιλτονιανής, η (68) γράφεται

$$\alpha w^{\alpha}(y) - g(y)\Big(p + Dw^{\alpha}(y)\Big) - f(y) = 0$$

$$\text{ή} \qquad \alpha w^{\alpha}(y) - g(y)Dw^{\alpha}(y) - \tilde{f}(y) = 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N, \tag{73}$$

όπου $\tilde{f}(y) = g(y)\cdot p + f(y)$. Η (73) αποτελεί μία Bellman εξίσωση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου (70)-(72), με την $\tilde{f}$ στη θέση της f. Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η λύση της θα είναι η εξής:

$$\begin{aligned} V(y) &= \inf_{x(\cdot)|x(0)=y}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cdot\tilde{f}\Big(x(t;y)\Big)dt \\ &= \inf_{x(\cdot)|x(0)=y}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\Big(g(x(t))\cdot p + f(x(t))\Big)dt \\ &= \inf_{x(\cdot)|x(0)=y}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\Big(x'(t)\cdot p + f(x(t))\Big)dt \end{aligned} \tag{74}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\tilde{L}\Big(x'(t), x(t)\Big) = p\cdot x'(t) + L\Big(-x'(t), x(t)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= p\cdot x'(t) + \sup_{p\in\mathbb{R}^N}\big\{p(-x'(t)) - H(p,x(t))\big\}\\
&= p\cdot x'(t) + \sup_{p\in\mathbb{R}^N}\big\{-x'(t)\cdot p + g(x(t))\cdot p + f(x(t))\big\}\\
&= p\cdot x'(t) + f(x(t)). \qquad (75)
\end{aligned}
$$

Από τις (74) και (75) παίρνουμε ότι η λύση της (73), άρα και της (68), είναι η εξής:

$$
w^\alpha(y) = V(y) = \inf_{x(\cdot)|x(0)=y}\int_0^{+\infty}\tilde{L}\Big(x'(t),x(t)\Big)e^{-\alpha t}dt,
$$

και έτσι δείξαμε την (69). Έτσι, προκύπτει η εξής αναπαράσταση για την ενεργούσα Χαμιλτονιανή:

$$
\overline{H}(p) = -\lim_{\alpha\to 0}\ \inf_{x(\cdot)|x(0)=y}\ \alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}\left[p\cdot x'(s) + L\Big(-x'(s),x(s)\Big)\right]ds.
$$

Η αναπαράσταση αυτή ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}^N$, οπότε το παραπάνω infimum μπορεί να θεωρηθεί πάνω σε όλα τα απόλυτα συνεχή μονοπάτια και μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $x(\cdot)$ με το $-x(\cdot)$, για να πάρουμε, τελικά, την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.3 *Υποθέτουμε ότι οι (1), (2), (3) υποθέσεις ικανοποιούνται και η $p\to H(p,x)$ είναι κυρτή για κάθε $x\in\mathbb{R}^N$ και L είναι ο Legendre μετασχηματισμός της. Η ενεργούσα Χαμιλτονιανή, που συνδέεται με την H, δίνεται από την εξής αναπαράσταση:*

$$
\overline{H}(p) = \lim_{\alpha\to 0}\ \sup_{x(\cdot)}\ \alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}\left[p\cdot x'(s) - L\Big(x'(s),x(s)\Big)\right]ds. \quad \square
$$

Αναφορές

[Bar] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Mathématiques & Applications **17**, Springer-Verlag, 1994.

[BLP] A. Bensoussan, J.-L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam- New York-Oxford, 1978.

[C1] M. C. Concordel, *Periodic homogenization of Hamilton- Jacobi equations: additive eigenvalues and variational formula*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), 1095-1117.

[C2] M. C. Concordel, *Periodic homogenization of Hamilton- Jacobi equations. II. Eiconal equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), 665-689.

[Ev1] L. C. Evans, *Periodic homogenisation of fully nonlinear partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **120** (1992), 245-265.

[Ev2] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Volume **19**, American Mathematical Society, 1998.

[HI] K. Horie and H. Ishii, *Homogenization of Hamilton- Jacobi equations on domains with small scale periodic structure*, Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), 1011-1058.

[Flem] W. H. Fleming, *The Cauchy problem for a nonlinear first-order partial differential equation*, J. Differential Equations **5** (1969), 515-530.

[CIL] M. G. Crandall, H. Ishii and P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1-67.