Ο Βέλτιστος Έλεγχος και οι Ασυνεχείς Λύσεις των Εξισώσεων **Hamilton-Jacobi** για τα Προβλήματα Συνοριακών Τιμών Τύπου **Dirichlet**

ΧΡΗΣΤΟΣ ΖΩΧΙΟΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2003

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμημα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης το Δεκέμβριο του 2003. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Γεώργιος Κοσιώρης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι : Γ. Κοσιώρης, Α. Τερσένοβ και Α. Τερτίκας.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Βέλτιστος Έλεγχος

Μία από τις πιο διαδεδομένες θεωρίες, ιδιαίτερα στον τομέα των Οικονομικών, είναι η λεγόμενη θεωρία **Βέλτιστου Ελέγχου**. Αυτή ασχολείται με τη βελτιστοποίηση δυναμικών συστημάτων. Σε αυτήν, ακριβώς, τη βελτιστοποίηση ενός μοντέλου βέλτιστου ελέγχου, παρουσιάζονται οι **Χαμιλτονιανές**. Στη συνέχεια, θα δούμε τα παραπάνω αναλυτικά.

Αρχικά, ας ορίσουμε το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου. Έστω $B \subset \mathbb{R}^M$ ένα συμπαγές σύνολο και $f : \mathbb{R}^N \times B \to \mathbb{R}^N$, $h : \mathbb{R}^N \times B \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Έστω

$$A = \{\alpha : \ \alpha : [0, +\infty) \to B, \text{ μετρήσιμη}\}.$$

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), \alpha(t)), & t > 0, \\ y(0) = x, \end{cases}$$

για $x \in \mathbb{R}^N$ και $\alpha \in A$. Η f, γενικότερα, είναι τέτοια, ώστε για κάθε επιλογή α και αρχικής τιμής x, το πρόβλημα αυτό να έχει μοναδική λύση, ορισμένη για όλα τα $t \in [0, +\infty)$, την οποία συμβολίζουμε $y_x(t; \alpha)$. Επίσης, ορίζουμε

$$\begin{aligned} J(x, \alpha) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(y_x(t; \alpha), \alpha(t)) dt, \\ V(x) &= \inf \{J(x, \alpha) : \alpha \in A\}, \end{aligned}$$

όπου $\lambda \geq 0$ κάποια σταθερά. Ζητάμε:
(i) Να βρούμε ένα $\alpha \in A$ ώστε $V(x) = J(x, \alpha)$.
(ii) Να βρούμε το $V(x)$.
Στην ορολογία του βέλτιστου ελέγχου, η Σ.Δ.Ε. του προβλήματος καλείται **εξίσωση κατάστασης** (η f είναι η **δυναμική** αυτής), το J καλείται **συναρτησιακό κόστος**, το λ είναι ο **παράγοντας έκπτωσης**, η h καλείται **τρέχον κόστος**, ενώ η V καλείται **συνάρτηση αξίας**. Το $\alpha \in A$ καλείται **έλεγχος** και, εάν ικανοποιεί την $V(x) = J(x, \alpha)$, τότε ονομάζεται **βέλτιστος έλεγχος**.
Για να είναι καλά ορισμένα τα J και V υποθέτουμε ότι
$(A1)$ Υπάρχει μία σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|f(x, \alpha)| \leq M$, $|h(x, \alpha)| \leq M$, $|f(x, \alpha) - f(y, \alpha)| \leq M|x - y|$, $|h(x, \alpha) - h(y, \alpha)| \leq M|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha \in A$.

$(A2)$ $\lambda > 0$.
Ένα παράδειγμα με το οποίο κατανοούνται καλύτερα οι έννοιες του συστήματος, της κατάστασης $y_x(t; \alpha)$ αυτού και των ελέγχων $\alpha(t)$, είναι το ακόλουθο:

Παράδειγμα 1 (Εθνική Οικονομία): Η οικονομία ενός τυπικού καπιταλιστικού έθνους είναι ένα σύστημα, το οποίο αποτελείται, εν μέρη, από τον πληθυσμό (ως καταναλωτές και παραγωγοί), από τις εταιρείες, τα υλικά αγαθά, τις εγκαταστάσεις παραγωγής, τα μετρητά, τις διαθέσιμες πιστώσεις κτλ. Η κατάσταση του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί σαν μία μαζική συλλογή δεδομένων: αμοιβές, μισθοί, κέρδη, απώλειες, πωλήσεις αγαθών και υπηρεσιών, επενδύσεις, ανεργία, βιοτικό κόστος, ποσοστό πληθωρισμού, μετοχές σε χρυσό και νομίσματα και το εξωτερικό εμπόριο. Η κυβέρνηση μπορεί να επηρεάσει την κατάσταση αυτού του συστήματος, χρησιμοποιώντας αρκετούς ελέγχους, κυρίως το πρωταρχικό επιτόκιο, την φορολογική πολιτική, την πειθώ σχετικά με τις αμοιβές, αλλά και τον καθορισμό των τιμών.

Παρόμοια ενδιαφέροντα παραδείγματα μπορεί να δει κάποιος στο [9]. Γενικά στη θεωρία ελέγχου, έχουμε ένα σύστημα και προσπαθούμε να επηρεάσουμε την κατάσταση του συστήματος μέσω ελέγχων, μέσω, δηλαδή, των τρόπων που πρέπει να χειριστούμε το σύστημα, ώστε να έχει μία συγκεκριμένη συμπεριφορά. Η δυναμική του συστήματος, ο τρόπος, δηλαδή, με τον οποίο αλλάζει η κατάσταση από τον επηρεασμό των ελέγχων, μπορεί να είναι πολύ περίπλοκη στα πραγματικά παραδείγματα. Στην περίπτωση της εθνικής οικονομίας, η δυναμική αποτελεί ακόμα ζήτημα μεγάλης έρευνας. Φυσικά, υπάρχουν πολλές γενικές αρχές για μία εθνική οικονομία - για παράδειγμα η αύξηση του πρωταρχικού επιτοκίου (το οποίο είναι ένας έλεγχος) γενικά επιφέρει αύξηση της ανεργίας - αλλά μία λεπτομερή και ακριβή εικόνα της δυναμικής μίας εθνικής οικονομίας είναι πολύ δύσκολη.

Όπως παρατηρούμε από το γεγονός κατά το οποίο το B είναι συμπαγές, υπάρχουν διάφοροι περιορισμοί για τους ελέγχους. Στο παράδειγμά μας, υπάρχουν αρκετοί προφανείς περιορισμοί των ελέγχων μας, για παράδειγμα η φορολογία δεν μπορεί να είναι υπερβολική και το πρωταρχικό επιτόκιο δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Στο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, αυτό που ψάχνουμε, πρακτικά, είναι η πολιτική που πρέπει να ακολουθήσουμε (ο βέλτιστος έλεγχος), ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μας, το οποίο εξαρτάται από τις συνθήκες της κατάστασης του δυναμικού συστήματος που έχουμε.

Τα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου με τα οποία θα ασχοληθούμε, ανήκουν στην κατηγορία των προβλημάτων **με χρόνο εξόδου** (σε αντίθεση με τα προβλήματα **άπειρου ορίζοντα**). Το χαρακτηριστικό αυτών είναι ότι $y_x(0) \in \bar{\Omega}$, ενώ το συναρτησιακό κόστος είναι το

$$J(x, \alpha, \theta) = \int_0^\theta h(y_x(s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds + \phi(y_x(\theta)) e^{-\lambda \theta},$$

όπου Ω ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$, θ ένας μη αρνητικός αριθμός και ϕ μία δεδομένη συνάρτηση στο συμπληρωματικό σύνολο του Ω. Εδώ, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V)$, όπου V ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Μία ειδική περίπτωση αυτού του προβλήματος είναι όταν, αντί για τους παραπάνω ελέγχους, θεωρήσουμε τους λεγόμενους **χαλαρούς ελέγχους** (βλέπε [4]). Αυτοί συμβολίζονται μ_s και ανήκουν στο σύνολο $L^\infty(\mathbb{R}^+, P(V))$, όπου $P(V)$ είναι το σύνολο των μέτρων πιθανότητας στο V. Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση κατάστασης και το συναρτησιακό κόστος είναι, αντίστοιχα, τα εξής:

$$\begin{cases} \hat{y}'(t) = \int_V f(\hat{y}(t), \alpha) d\mu_t, \\ \hat{y}(0) = x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

$$\hat{J}(x, \mu, \theta) = \int_0^\theta \int_V h(\hat{y}_x(s), \alpha) e^{-\lambda s} d\mu_s ds + \phi(\hat{y}_x(\theta)) e^{-\lambda\theta}.$$

Στο πρόβλημα με χρόνο εξόδου από το Ω, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι χρόνοι

$$\begin{aligned} \tau &= \inf\{t \geq 0, y_x(t) \notin \Omega\} \\ \bar{\tau} &= \inf\{t \geq 0, y_x(t) \notin \bar{\Omega}\}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση αξίας u δεν είναι συνεχής, ο τ, ο πρώτος χρόνος εξόδου της τροχιάς $y_x(t)$ από το Ω, παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η συνάρτηση αξίας u ικανοποιεί μία εξίσωση, τη λεγόμενη **Αρχή Δυναμικού Προγραμματισμού.** Σύμφωνα με αυτήν, η u ικανοποιεί τον εξής τύπο :

$$u(x) = \inf_{\alpha \in A} \left\{ \int_0^T h(y_x(t, \alpha), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt + u(y_x(T, \alpha)) e^{-\lambda T} \right\}. \qquad (1)$$

Ένα ιδιαίτερα σημαντικό γεγονός που πρέπει να τονιστεί είναι ότι η (1) ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$ και όλους τους $T > 0$, κάτω από πολύ γενικές συνθήκες για τα δεδομένα. Όταν η h, άρα και η u, είναι φραγμένες, η (1) χαρακτηρίζει τη συνάρτηση αξίας u υπό την έννοια ότι, αν v είναι μία φραγμένη συνάρτηση που ικανοποιεί την (1) για όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$ και όλα τα $T > 0$, τότε $v \equiv u$. Όταν η u είναι αρκετά ομαλή ικανοποιεί, υπό την έννοια του ιξώδους, μία παραλλαγή της Α.Δ.Π., την λεγόμενη **Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)** εξίσωση. Σε αυτήν αναφερόμαστε στην επόμενη παράγραφο.

1.2 Λύση ιξώδους για Hamilton-Jacobi εξισώσεις

Εξισώσεις Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, t, Du) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0,$$

όπως επίσης και

$$\lambda u + H(x, Du) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

εμφανίζονται σε πολλά πεδία, όπως στο λογισμό μεταβολών, στη γεωμετρική οπτική, στο βέλτιστο έλεγχο ή σε διαφορικά παίγνια. Εδώ η $u = u(x, t)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, Du = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\Big),$$

όπου H και u είναι πραγματικές συναρτήσεις και $\lambda \geq 0$ είναι σταθερά. Ονομάζουμε την συνάρτηση H Χαμιλτονιανή. Οι Χαμιλτονιανές που μας ενδιαφέρουν εδώ, είναι αυτές που εμφανίζονται στα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου, οι οποίες έχουν τη μορφή

$$H(x,p) = \sup_{a \in B} \{-f(x,a) \cdot p - h(x,a)\}.$$

Τότε, αν η u είναι αρκετά ομαλή, ικανοποιεί σε όλα τα σημεία που είναι παραγωγίσιμη, τη λεγόμενη **Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)** εξίσωση:

$$\lambda u(x) + H(x, Du(x)) = 0. \tag{2}$$

Μία απόδειξη αυτού υπάρχει στο [1]. Όταν η συνάρτηση αξίας είναι απλά συνεχής (η παντού διαφορισιμότητα είναι πολύ περιοριστική υπόθεση για τη u, ενώ η $u(x)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}^N$ κάτω από πολύ γενικές συνθήκες των δεδομένων, όπως η φραξιμότητα της h), τότε ικανοποιεί την (2) υπό μία ασθενή έννοια, υπό την έννοια του ιξώδους.

Ορισμός 1 *Έστω συνάρτηση $u \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.*
(i) Η u είναι υπολύση ιξώδους της

$$H(x, u, Du) = 0 \ \ \text{στο} \ \ \Omega, \tag{3}$$

αν και μόνο αν, για κάθε $\phi \in C^1(\Omega)$ και για κάθε σημείο τοπικού μεγίστου y της $u - \phi$,

$$H(y, u(y), D\phi(y)) \leq 0.$$

(ii) Η u είναι υπερλύση ιξώδους της (3) αν και μόνο αν, για κάθε $\phi \in C^1(\Omega)$ και για κάθε σημείο τοπικού ελαχίστου y της $u - \phi$,

$$H(y, u(y), D\phi(y)) \geq 0.$$

(iii) Η u είναι λύση ιξώδους της (3) αν είναι υπολύση και υπερλύση ιξώδους της (3).

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε, βασικά, με λύσεις, που δεν είναι αναγκαστικά συνεχείς. Αυτό γιατί, πολλά προβλήματα βέλτιστου ελέγχου έχουν ασυνεχή συνάρτηση αξίας και θέλουμε να επεκτείνουμε, με κάποιο τρόπο, και σε αυτά τα προβλήματα, το χαρακτηρισμό της συνάρτησης αξίας ως η μοναδική λύση της (HJB) εξίσωσης με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Αρχικά, δίνουμε τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 2 1. *Για μία συνάρτηση $u : X \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, ορίζουμε:*

$$\begin{aligned}
\limsup_{y \to x} u(y) &:= \lim_{r \to 0^+} \sup\{u(y) : y \in X, 0 < |y - x| \leq r\}, \\
\liminf_{y \to x} u(y) &:= \lim_{r \to 0^+} \inf\{u(y) : y \in X, 0 < |y - x| \leq r\}.
\end{aligned}$$

2. *Η $u : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^N)$ είναι* ***άνω (κάτω) ημισυνεχής (συμβολίζουμε α.η.σ. (κ.η.σ.)) στο σημείο $x_0 \in E$*** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in E \cap B(x_0, \delta)$ να ισχύει $u(x) < u(x_0) + \epsilon \quad (u(x) > u(x_0) - \epsilon)$. Η u είναι* ***άνω (κάτω) ημισυνεχής,*** *αν ισχύει το παραπάνω για κάθε $x \in E$.*

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τη σχέση:

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) \leq u(x_0) \;\; (\liminf_{x \to x_0} u(x) \geq u(x_0)).$$

3. *Έστω $u : X \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$. Ο* ***άνω ημισυνεχής φάκελος*** *της u είναι ο:*

$$u^*(x) := \limsup_{y \to x} u(y).$$

Ο ***κάτω ημισυνεχής φάκελος*** *της u είναι ο:*

$$u_*(x) := \liminf_{y \to x} u(y).$$

Παρατήρηση 1 *Πρακτικά μιλώντας, μία συνάρτηση u είναι α.η.σ. σε ένα σημείο x_0 αν οι τιμές της συνάρτησης κοντά στο x_0 δεν πηδάνε απότομα προς τα πάνω. Αν δεν πηδάνε απότομα προς τα κάτω, η συνάρτηση είναι κ.η.σ. στο x_0.*

Παρατήρηση 2 *Στον παραπάνω ορισμό των φακέλων είναι*

$$\begin{aligned}
\limsup_{y \to x} u(y) &:= \lim_{r \to 0^+} \sup\{u(y) : y \in X, |y - x| \leq r\}, \\
\liminf_{y \to x} u(y) &:= \lim_{r \to 0^+} \inf\{u(y) : y \in X, |y - x| \leq r\}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 3 *Ισχύουν οι εξής ιδιαίτερα σημαντικές ιδιότητες για τις u^* και u_* (για απόδειξη αυτών βλέπε [1], σελ.296) :*

i) $u_* \leq u \leq u^*$,

ii) $u_* = -(-u)^*$,

iii) *Η u^* είναι α.η.σ. ενώ η u_* είναι κ.η.σ.,*

iv) *Η u είναι α.η.σ. στο x_0 αν και μόνο αν $u(x_0) = u^*(x_0)$, η u είναι κ.η.σ. στο x_0 αν και μόνο αν $u(x_0) = u_*(x_0)$.*

Δίνουμε, τώρα, τον ορισμό των υπολύσεων και υπερλύσεων ιξώδους της εξίσωσης πρώτης τάξης

$$F(x, u, Du) = 0 \;\; \text{στο} \;\; \Omega, \tag{4}$$

(όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοιχτό και $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ συνεχής), στην περίπτωση που η u δεν είναι συνεχής.

Ορισμός 3 *Μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (αντίστοιχα άνω ημισυνεχής) είναι μία υπερλύση ιξώδους (αντίστοιχα υπολύση) της (4) αν για όλες τις $\varphi \in C^1(\Omega)$ και για $x \in \Omega$ ένα σημείο τοπικού ελαχίστου της $u - \varphi$ (αντίστοιχα για $x \in \Omega$ ένα σημείο τοπικού μεγίστου της $u - \varphi$), έχουμε*

$$F(x, u(x), D\varphi(x)) \geq 0 \quad (\textit{αντίστοιχα}, \ \leq 0).$$

Παρατήρηση 4 *Η παραπάνω επέκταση του ορισμού των υπο- και υπερλύσεων ιξώδους σε ημισυνεχείς συναρτήσεις δεν αλλάζει, δεν επεκτείνει και την έννοια της λύσης ιξώδους όπως την έχουμε δώσει, γιατί μία συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα υπο- και υπερλύση ιξώδους σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό είναι αυτομάτως συνεχής. Άρα χρειαζόμαστε ένα επιπλέον εργαλείο, που είναι οι έννοιες των άνω και κάτω φακέλων μίας συνάρτησης. Έτσι δικαιολογείται η εισαγωγή αυτών των εννοιών. Με βάση αυτές, ορίζουμε:*

Ορισμός 4 *Μία τοπικά φραγμένη συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μία μη-συνεχής λύση ιξώδους της (4) αν ο u^* είναι μία υπολύση ιξώδους της (4) και ο u_* είναι μία υπερλύση ιξώδους της (4), σύμφωνα με τον ορισμό 3.*

Παρατήρηση 5 *Ο ορισμός 4 έχει νόημα, αφού η u^* είναι α.η.σ. και η u_* είναι κ.η.σ., όπως είπαμε παραπάνω. Επίσης, αν $u \in C(\Omega)$, τότε $u = u^* = u_*$ και ο ορισμός συμπίπτει με τον αρχικό ορισμό που δώσαμε για τη λύση ιξώδους.*

1.3 Οι γενικευμένες συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet και οι " μη-εκφυλιζόμενες " συνθήκες

Ενδιαφερόμαστε να αποδείξουμε μία αρχή σύγκρισης για ασυνεχείς υπολύσεις και υπερλύσεις ιξώδους του γενικευμένου, τύπου Dirichlet, προβλήματος συνοριακών τιμών για μία πρώτης τάξης Hamilton-Jacobi εξίσωση, δηλαδή του

$$\begin{cases} H(x, u, Du) = 0 \quad \text{στο} \quad \Omega, \\ \max\Big(H(x, u, Du); u - \phi\Big) \geq 0 \quad \text{στο} \quad \partial\Omega, \\ \min\Big(H(x, u, Du); u - \phi\Big) \leq 0 \quad \text{στο} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Οι συνοριακές συνθήκες που έχουμε εδώ είναι γενικευμένες, σε αντίθεση με την κλασική Dirichlet συνοριακή συνθήκη

$$u = \phi \quad \text{στο} \quad \partial\Omega. \tag{5}$$

Αυτό γιατί, δεν υπάρχει κάποιος λόγος, για τον οποίο η (5) να πρέπει να ισχύει με την κλασική έννοια. Μπορούν να κατασκευαστούν απλά παραδείγματα, στα οποία η συνάρτηση αξίας είναι συνεχής στο Ω, μπορεί να επεκταθεί συνεχώς στο $\bar{\Omega}$, αλλά η επέκτασή της δεν ικανοποιεί την (5).

Γι' αυτό είναι αναγκαίο να χαλαρώσουμε τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet, η οποία πρέπει να θεωρηθεί υπό την έννοια του ιξώδους, όπως δόθηκε παραπάνω. Η εξήγηση αυτών των γενικευμένων συνοριακών συνθηκών είναι, ότι η εξίσωση θα πρέπει να ισχύει στα σημεία του συνόρου, όπου η λύση δεν επιδέχεται τα συνοριακά δεδομένα ϕ. Από την άποψη των ελέγχων, αυτές οι γενικευμένες συνοριακές συνθήκες είναι πολύ φυσικές, αφού εκφράζουν, κοντά σε κάθε σημείο του συνόρου, από τη μία τις πιθανές συμπεριφορές των δυναμικών (υπάρχει κάποιος έλεγχος για τον οποίο η τροχιά βγαίνει από το Ω αμέσως;) και από την άλλη τη στρατηγική του ελέγχου (είναι καλύτερα να βγει αμέσως από το Ω ή να μείνει μέσα;). Αυτό οδηγεί σε τέσσερεις περιπτώσεις, οι οποίες είναι ισχυρά συνδεδεμένες με τις αντίστοιχες τέσσερεις που παρουσιάζονται στο πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Η ζητούμενη αρχή σύγκρισης θα αποδειχθεί με χρήση κάποιων " μη-εκφυλιζόμενων " συνθηκών για την H στο σύνορο. Στα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου (με χρόνο εξόδου), αυτές μεταφράζονται ως συνθήκες στα ελεγχόμενα διανυσματικά πεδία, οι οποίες κανονίζουν τη συμπεριφορά των πεδίων στο σύνορο και είναι κατάλληλες ώστε η συνάρτηση αξίας να είναι συνεχής και η μοναδική λύση ιξώδους του προβλήματός μας. Η μη-μοναδικότητα στο πρόβλημά μας, προκύπτει ακριβώς από τον ρόλο που έχουν οι τροχιές (εδώ, ισοδύναμα, τα διανυσματικά πεδία f), οι οποίες είναι εφαπτόμενες στο σύνορο $\partial\Omega$ και από τη δυνατότητα του να ορίσουμε διαφορετικές συναρτήσεις αξίας σε προβλήματα ελέγχου με χρόνο εξόδου, χρησιμοποιώντας διαφορετικούς χρόνους εξόδου από το σύνορο (για παράδειγμα τους $\tau, \bar{\tau}$ που είδαμε στην παρ.1.1). Οι " μη-εκφυλιζόμενες " συνθήκες πιστοποιούν ότι αυτές οι συγκεκριμένες τροχιές (ή διανυσματικά πεδία), οι εφαπτόμενες, δηλαδή, τροχιές που παραμένουν στο σύνορο $\partial\Omega$, δεν παίζουν κάποιον ουσιαστικό ρόλο (βλέπε και [6]). Η θέληση για αποφυγή εφαπτομενικών στο σύνορο τροχιών, εξηγείται πρακτικά από το γεγονός κατά το οποίο, οι διαταραχές, οι οποίες είναι πάντα υπαρκτές στον πραγματικό κόσμο, μπορούν εύκολα, αν κινούμαστε εφαπτομενικά, να μας βγάλουν έξω από τον στόχο μας (όπου εδώ ως στόχο έχουμε τη φυγή έξω από το Ω.)

Στην παράγραφο 2, η οποία είναι από το [3], θα δούμε αυτήν την αρχή σύγκρισης στην οποία αναφερόμαστε καθώς και κάποιες παραλλαγές αυτής, ενώ θα μελετήσουμε και μία περίπτωση μοναδικότητας της λύσης για το πρόβλημα ελέγχου με χρόνο εξόδου, βασισμένη στην αρχή σύγκρισης, όπου θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες " μη-εκφυλιζόμενες " συνθήκες. Στην παράγραφο 3, η οποία είναι από το [1], σελ.333-339, θα δούμε το πρόβλημα χρονο-βέλτιστου ελέγχου, στο οποίο δεν έχουμε μοναδικότητα λύσης ακριβώς λόγω της έλλειψης των συνθηκών της παραγράφου 2, θα μιλήσουμε για την πλήρη λύση αυτού και θα δώσουμε κάποια αποτελέσματα μοναδικότητας, με βάση αυτήν τη λύση. Τέλος, στην παράγραφο 4, η οποία είναι από το [11], θα δούμε προβλήματα συνοριακών τιμών στην περίπτωση που η Χαμιλτονιανή δεν είναι συνεχής, θα αναφερθούμε στις αρχές βελτιστότητας, θα μιλήσουμε για τις μέγιστες υπολύσεις και τις ελάχιστες υπερλύσεις και πώς αυτές μας δίνουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για μοναδικότητα λύσης. Επίσης θα μελετήσουμε και ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μοναδικότητας.

2 Αρχή Σύγκρισης και μοναδικότητα λύσης για Hamilton-Jacobi Εξισώσεις Τύπου Dirichlet

2.1 Η Αρχή Σύγκρισης

Θεωρούμε $\bar{u}$ μία άνω ημισυνεχής ($\alpha.\eta.\sigma.$) συνάρτηση, που ικανοποιεί, υπό την έννοια του ιξώδους, τις

$$H(x, \bar{u}, D\bar{u}) \leq 0 \quad \text{στο} \quad \Omega, \tag{6}$$

$$\min\Big(H(x, \bar{u}, D\bar{u}), \bar{u} - \phi\Big) \leq 0 \quad \text{στο} \quad \partial\Omega, \tag{7}$$

και θεωρούμε $\underline{u}$, μία κάτω ημισυνεχής ($\kappa.\eta.\sigma.$) συνάρτηση, που ικανοποιεί, υπό την έννοια του ιξώδους, τις

$$H(x, \underline{u}, D\underline{u}) \geq 0 \quad \text{στο} \quad \Omega, \tag{8}$$

$$\max\Big(H(x, \underline{u}, D\underline{u}), \underline{u} - \phi\Big) \geq 0 \quad \text{στο} \quad \partial\Omega. \tag{9}$$

Έχουμε ως δεδομένα, ένα ανοιχτό φραγμένο χωρίο Ω του $\mathbb{R}^N$ και μία Χαμιλτονιανή H που ικανοποιεί τις :

(H1) Η H είναι συνεχής στο $\bar{\Omega} \times [-R, R] \times \bar{B}_R$ $(\forall R < +\infty)$.

(H2) Για κάθε $R > 0$, υπάρχει $\gamma_R > 0$, τέτοιο ώστε
$H(x, t, p) - H(x, s, p) \geq \gamma_R(t - s)$,
$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad -R \leq s \leq t \leq R, \quad p \in \mathbb{R}^N$.

(H3) Για κάθε $R > 0$, υπάρχει ένα μέτρο συνέχειας m_R, τέτοιο ώστε
$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq m_R\{|x - y|(1 + |p|)\}$
για $x, y \in \bar{\Omega}, \quad |t| \leq R, \quad p \in \mathbb{R}^N$ και η $H(x, t, p)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ως προς p , για $|t| \leq R$ και για x σε μία γειτονιά του $\partial\Omega$.

Επίσης, θεωρούμε και ορισμένες " μη-εκφυλιζόμενες " συνθήκες. Έστω $d(\cdot)$ η απόσταση από το $\partial\Omega$ και υποθέτουμε ότι η d είναι μία $C^{1,1}$ συνάρτηση σε μία γειτονιά του $\partial\Omega$ και θέτουμε $n(x) = -\nabla d(x)$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες :

(H4) Για δεδομένο $x_1 \in \partial\Omega$, $\forall R > 0$, $\exists\, C$ τέτοια ώστε, αν $|t| \leq R$, $|x_1 - y| \leq 1/C$, $y \in \bar{\Omega}$ και $\lambda \geq C(1 + |p|)$, τότε
$H(y, t, p + \lambda n(y)) > 0$.

(H5) Για δεδομένο $x_2 \in \partial\Omega$, $\forall R > 0$, $\exists\, C$ τέτοια ώστε, αν $|t| \leq R$, $|x_2 - y| \leq 1/C$, $y \in \bar{\Omega}$ και $\lambda \geq C(1 + |p|)$, τότε
$H(y, t, p - \lambda n(y)) < 0$.

Το βασικό αποτέλεσμα (το οποίο συναντούμε στο [3]), είναι το εξής :

Θεώρημα 1 *Θεωρούμε ότι η H ικανοποιεί τις (H1)-(H3) και ότι η ϕ είναι συνεχής. Θεωρούμε u μία φραγμένη, α.η.σ. υπολύση των (6),(7) και v μία φραγμένη, κ.η.σ. υπερλύση των (8),(9). Υποθέτουμε ότι η (H4) ισχύει στο σύνολο $\Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega,\ u(x) \leq \phi(x),\ v(x) < \phi(x)\}$ και η (H5) ισχύει στο σύνολο $\Gamma_2 = \{x \in \partial\Omega,\ u(x) > \phi(x),\ v(x) \geq \phi(x)\}$. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι,*

$$\forall x \in \Gamma_1, \quad u(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} u(y), \qquad \forall x \in \Gamma_2, \quad v(x) = \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} v(y). \quad (10)$$

Τότε

$$u \leq v \qquad \text{στο } \bar{\Omega}.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$M := \max_{x \in \bar{\Omega}} (u - v)(x)$$

και, αρχικά, θεωρούμε την περίπτωση κατά την οποία, αυτό το μέγιστο λαμβάνεται μόνο σε εσωτερικά σημεία, δηλαδή ισχύει

$$m := \max_{x \in \partial\Omega} (u - v)(x) < M.$$

- Αν $m \leq 0$, τότε ισχύει ότι $u \leq v$ στο $\partial\Omega$. Επομένως, ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία της μεθόδου διπλασιασμού μεταβλητών, όπως αυτή υπάρχει στην απόδειξη του κλασικού Θεωρήματος της αρχής Σύγκρισης (βλέπε [2]), συμπεραίνουμε ότι $u \leq v$ στο $\bar{\Omega}$.

- Αν $m > 0$, τότε η $w = v + m$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με την v. Επίσης, ισχύει ότι $u - v \leq m$ στο $\partial\Omega$, δηλαδή $u \leq w$ στο $\partial\Omega$. Τότε, όπως και πριν, $u \leq w$ στο $\bar{\Omega}$, δηλαδή $u - v \leq m$ στο $\bar{\Omega}$. Άρα, $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} (u - v)(x) \leq m$, άτοπο.

Η άλλη περίπτωση είναι, όταν

$$M = \max_{x \in \bar{\Omega}} (u - v)(x) = (u - v)(x_0) \quad \text{για κάποιο } x_0 \in \partial\Omega.$$

Μπορούμε να έχουμε τις εξής τέσσερεις περιπτώσεις :

(i) $u(x_0) \leq \phi(x_0)$, $v(x_0) \geq \phi(x_0)$,

(ii) $u(x_0) \leq \phi(x_0)$, $v(x_0) < \phi(x_0)$,

(iii) $u(x_0) > \phi(x_0)$, $v(x_0) \geq \phi(x_0)$,

(iv) $u(x_0) > \phi(x_0)$, $v(x_0) < \phi(x_0)$.

Στην περίπτωση (i), έχουμε $u(x_0) \leq v(x_0)$, δηλαδή $M = (u - v)(x_0) \leq 0$, οπότε $u \leq v$ στο $\bar{\Omega}$. Θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση (ii). Η περίπτωση (iii)

είναι παρόμοια με αυτήν, ενώ η περίπτωση (iv) είναι ευκολότερη. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $M > 0$. Θέτουμε

$$R = \max(||u||_\infty, ||v||_\infty)$$

και έτσι βγάζουμε από τις υποθέσεις την εξάρτηση στο R. Αφού $x_0 \in \Gamma_1$ (είμαστε στην περίπτωση (ii)), από την (10) έχουμε ότι $u(x_0) = \limsup_{\substack{y\to x_0\\ y\in\Omega}} u(y)$. Δηλαδή, εξ'ορισμού του $\limsup_{\substack{y\to x_0\\ y\in\Omega}} u(y)$,
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, ώστε $\forall r > 0,\ r < \delta$, να ισχύει ότι

$$|\sup\{u(y) : y \in \Omega,\ |y - x_0| < r\} - u(x_0)| < \epsilon$$

ή

$$-\epsilon < \sup\{u(y) : y \in \Omega,\ |y - x_0| < r\} - u(x_0) < \epsilon.$$

Δηλαδή, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \delta_n > 0$, ώστε $\forall r > 0,\ r < \delta_n$, να ισχύει ότι

$$u(x_0) - \frac{1}{n} < \sup\{u(y) : y \in \Omega,\ |y - x_0| < r\} \tag{11}$$

και

$$\sup\{u(y) : y \in \Omega,\ |y - x_0| < r\} < u(x_0) + \frac{1}{n}\ . \tag{12}$$

Επομένως, εξ' ορισμού του supremum, υπάρχουν x_n, $n \in \mathbb{N}$, με $x_n \in \Omega$, $|x_n - x_0| < r$, ώστε :
Από την (11) να έχουμε, $u(x_0) - \frac{1}{n} < u(x_n) + \frac{1}{n}$, δηλαδή $u(x_0) - \frac{2}{n} < u(x_n)$, οπότε

$$u(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} u(x_n),$$

και από την (12), $u(x_n) < u(x_0) + \frac{1}{n}$, δηλαδή

$$u(x_0) \ge \limsup_{n\to\infty} u(x_n),$$

Επομένως, $\limsup_{n\to\infty} u(x_n) \le u(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} u(x_n)$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) = u(x_0).$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $\delta_n \to 0$, οπότε και $x_n \to x_0$, αφού $|x_n - x_0| < \delta_n$. Βρήκαμε, δηλαδή, ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \Omega$, ώστε $x_n \to x_0$ και $u(x_n) \to u(x_0)$, καθώς $n \to \infty$.
Εισάγουμε τη συνάρτηση

$$\psi_n(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\epsilon_n} - \left[\left(\frac{d(x)-d(y)}{\alpha_n} - 1\right)^-\right]^2 - |x - x_0|^2,$$

όπου

$$\epsilon_n = |x_n - x_0|, \quad \alpha_n = d(x_n),$$

και θέτουμε

$$M_n = \max_{x,y \in \bar{\Omega}} \psi_n(x,y).$$

Τώρα, έχουμε :

$$M_n \geq \psi_n(x_n, x_0) = u(x_n) - v(x_0) - \frac{|x_n - x_0|^2}{\epsilon_n} - \left[\left(\frac{d(x_n) - d(x_0)}{\alpha_n} - 1 \right)^- \right]^2 - |x_n - x_0|^2$$

και, αφού $u(x_n) \to u(x_0)$, $|x_n - x_0|^2 \to 0$, $d(x_0) = 0$, παίρνουμε

$$\liminf_{n\to\infty} M_n \geq M. \tag{13}$$

Τονίζουμε ότι το νέο στοιχείο εδώ είναι το ότι παίρνουμε δύο κλίμακες, ονομαστικά τις $\alpha_n < \epsilon_n$, ούτως ώστε να προκύψει η (13). Συμβολίζουμε με $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ ένα σημείο μεγίστου της ψ_n. Έχουμε, τώρα, το παρακάτω Λήμμα, την απόδειξη του οποίου παραθέτουμε μετά :

Λήμμα 1 *Καθώς $n \to \infty$, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :*

$$\begin{aligned}
&|\bar{x}_n - \bar{y}_n| \to 0,\\
&u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n) \to M,\\
&v(\bar{y}_n) \to v(x_0),\\
&u(\bar{x}_n) \to u(x_0),\\
&\frac{|\bar{x}_n - \bar{y}_n|^2}{\epsilon_n} \to 0,\\
&|\bar{x}_n - x_0|^2 \to 0,\\
&\left(\frac{d(\bar{x}_n) - d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1 \right)^- \to 0.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 6 *Το Λήμμα 1 δείχνει, ουσιαστικά, τον λόγο για τον οποίο χρησιμοποιούνται οι όροι $\frac{|x-y|^2}{\epsilon_n}$ και $|x-x_0|^2$, στην ψ_n. Όπως φαίνεται από αυτό, για μεγάλα n, έχουμε έναν " εντοπισμό " της τετμημένης και της τεταγμένης του σημείου μεγίστου $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ της ψ_n, κοντά στο σημείο x_0. Ο λόγος αυτού του " εντοπισμού " φαίνεται αμέσως παρακάτω.*

Τώρα, έχουμε: Έστω $\epsilon > 0$, $\epsilon < \frac{1}{2}$. Τότε υπάρχει N τέτοιο ώστε, $\forall n \geq N$, να ισχύει $\left(\frac{d(\bar{x}_n) - d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1 \right)^- < \epsilon$, σύμφωνα με το Λήμμα 1. Αν $\bar{x}_{n_0} \in \partial\Omega$ για κάποιο $n_0 \geq N$, τότε θα είχαμε $\left(\frac{d(\bar{x}_{n_0}) - d(\bar{y}_{n_0})}{\alpha_{n_0}} - 1 \right)^- = \left(\frac{-d(\bar{y}_{n_0})}{\alpha_{n_0}} - 1 \right)^- > \frac{1}{2} > \epsilon$, άτοπο. Επομένως, $\bar{x}_n \in \Omega \; \forall n \geq N$ και, λόγω της (6), έχουμε ότι

$$H(\bar{x}_n, u(\bar{x}_n), Du(\bar{x}_n)) \leq 0,$$

υπό την έννοια του ιξώδους. Για τα $\bar{y}_n$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Υπάρχει υπακολουθία $\bar{y}_{n_k}$, με $\bar{y}_{n_k} \in \Omega\ \forall k \in \mathbb{N}$. Τότε, από την (8) έχουμε ότι
$$H(\bar{y}_{n_k}, v(\bar{y}_{n_k}), Dv(\bar{y}_{n_k})) \geq 0,$$
υπό την έννοια του ιξώδους.

- Υπάρχει υπακολουθία $\bar{y}_{n_{k'}}$, με $\bar{y}_{n_{k'}} \in \partial\Omega\ \forall k' \in \mathbb{N}$. Τότε, έχουμε: Λόγω του Λήμματος 1, $v(\bar{y}_{n_{k'}}) \to v(x_0)$, $|\bar{x}_{n_{k'}} - \bar{y}_{n_{k'}}| \to 0$ και $|\bar{x}_{n_{k'}} - x_0|^2 \to 0$, άρα $|\bar{y}_{n_{k'}} - x_0|^2 \to 0$, οπότε $\phi(\bar{y}_{n_{k'}}) \to \phi(x_0)$, γιατί ϕ συνεχής, και $x_0 \in \Gamma_1$, άρα $v(x_0) < \phi(x_0)$, δηλαδή $\lim_{k' \to \infty} v(\bar{y}_{n_{k'}}) < \lim_{k' \to \infty} \phi(\bar{y}_{n_{k'}})$. Οπότε, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε, $\forall\ k' \geq k$ να ισχύει $v(\bar{y}_{n_{k'}}) < \phi(\bar{y}_{n_{k'}})$. Επομένως, λόγω της (9) θα έχουμε ότι
$$H(\bar{y}_{n_{k'}}, v(\bar{y}_{n_{k'}}), Dv(\bar{y}_{n_{k'}})) \geq 0,$$
για κάθε $k' \geq k$, με την ανισότητα να ισχύει υπό την έννοια του ιξώδους.

Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι, για όλα τα n από ένα δείκτη και πάνω ισχύει
$$H(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), Dv(\bar{y}_n)) \geq 0,$$
υπό την έννοια του ιξώδους.

Παρατήρηση 7 *Ο όρος* $\left(\frac{d(x)-d(y)}{\alpha_n} - 1\right)^-$ *στην* ψ_n *χρησιμοποιείται στο να δείξουμε ότι* $\bar{x}_n \in \Omega$, *για τα* n *από κάποιο* N *και πάνω. Γίνεται χρήση μόνο του αρνητικού μέρους της* $\frac{d(x)-d(y)}{\alpha_n} - 1$ *γιατί, πιθανή ύπαρξη του θετικού μέρους της στο σημείο* $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$, *δίνει* $\frac{d(\bar{x}_n)-d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1 > 0$, *δηλαδή* $d(\bar{x}_n) - d(\bar{y}_n) > d(x_n) > 0$ $(x_n \in \Omega$ *άρα* $d(x_n) > 0)$. *Επομένως,* $d(\bar{x}_n) > d(\bar{y}_n) \geq 0$, *άρα* $\bar{x}_n \in \Omega$, *δηλαδή αυτό που θέλουμε θα ίσχυε αυτόματα. Οπότε θεωρούμε μόνο το αρνητικό μέρος.*

Επομένως, για αρκετά μεγάλα n, έχουμε ότι
$$H(\bar{x}_n, u(\bar{x}_n), Du(\bar{x}_n)) \leq 0 \qquad \text{και} \qquad H(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), Dv(\bar{y}_n)) \geq 0,$$
υπό την έννοια του ιξώδους. Αυτό μεταφράζεται ως εξής :
Αφού $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ το σημείο μεγίστου της $\psi_n(x,y)$, το $\bar{x}_n$ είναι το σημείο μεγίστου της συνάρτησης
$$x \to u(x) - \psi_n^1(x)$$
όπου
$$\psi_n^1(x) = v(\bar{y}_n) + \frac{|x - \bar{y}_n|^2}{\epsilon_n} + \left[\left(\frac{d(x) - d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1\right)^-\right]^2 + |x - x_0|^2.$$
Η u είναι άνω ημισυνεχής υπολύση ιξώδους της (6) και $\bar{x}_n \in \Omega$, άρα
$$H(\bar{x}_n, u(\bar{x}_n), D\psi_n^1(\bar{x}_n)) \leq 0,$$

δηλαδή

$$H\left(\bar{x}_n, u(\bar{x}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right) \leq 0, \tag{14}$$

όπου

$$\rho_n = 2(\bar{x}_n - x_0), \quad \lambda_n = \frac{2}{\alpha_n}\left(\frac{d(\bar{x}_n) - d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1\right)^{-}.$$

Ομοίως, το $\bar{y}_n$ είναι το σημείο μεγίστου της συνάρτησης

$$y \to -v(y) + \psi_n^2(y)$$

όπου

$$\psi_n^2(y) = u(\bar{x}_n) - \frac{|\bar{x}_n - y|^2}{\epsilon_n} - \left[\left(\frac{d(\bar{x}_n) - d(y)}{\alpha_n} - 1\right)^{-}\right]^2 - |\bar{x}_n - x_0|^2.$$

Επομένως, το $\bar{y}_n$ είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης $v - \psi_n^2$. Η v είναι κάτω ημισυνεχής υπερλύση ιξώδους των (8) και (9) και, είτε $\bar{y}_n \in \Omega$ είτε $\bar{y}_n \in \partial\Omega$ και $v(\bar{y}_n) < \phi(\bar{y}_n)$, για αρκετά μεγάλα n, άρα

$$H(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), D\psi_n^2(\bar{y}_n)) \geq 0,$$

δηλαδή

$$H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{y}_n)\right) \geq 0. \tag{15}$$

Τώρα, λόγω της (14), από τη συνθήκη (H4) η οποία ισχύει στο Γ_1 και $x_0 \in \Gamma_1$ ενώ $\bar{x}_n \to x_0$ όπως $n \to \infty$, προκύπτει ότι, για κάποια σταθερά $C(x_0)$, ισχύει

$$0 \leq \lambda_n \leq C\left(1 + \frac{2|\bar{x}_n - \bar{y}_n|}{\epsilon_n} + |\rho_n|\right). \tag{16}$$

Από τις (14) και (15) παίρνουμε

$$H\left(\bar{x}_n, u(\bar{x}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right) - H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{y}_n)\right) \leq 0.$$

Προσθαφαιρούμε τον όρο $H\left(\bar{x}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} & H\left(\bar{x}_n, u(\bar{x}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right) - H\left(\bar{x}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right) \\ \leq \; & H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{y}_n)\right) - H\left(\bar{x}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right). \end{aligned}$$

Τώρα : αν $u(\bar{x}_n) < v(\bar{y}_n)$ τότε

$$M_n = \psi_n(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n) - \frac{|\bar{x}_n - \bar{y}_n|^2}{\epsilon_n} - \left[\left(\frac{d(\bar{x}_n) - d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1\right)^{-}\right]^2 - |\bar{x}_n - x_0|^2 \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Όμως $\liminf_{n\to\infty} M_n \geq M > 0$, άρα, $M_n > 0$ για αρκετά μεγάλα n, κάτι που αποτελεί άτοπο. Επομένως, για όλα τα n που είναι αρκετά μεγάλα,

$$u(\bar{x}_n) \geq v(\bar{y}_n).$$

Θέτοντας, λοιπόν, $\gamma = \gamma_R$, με χρήση της ιδιότητας (H2) στο πρώτο μέλος της ανισότητας, έχουμε :

$$\begin{aligned}\gamma\left((u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n)\right) &\leq H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{y}_n)\right) \\ &- H\left(\bar{x}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right).\end{aligned}$$

Προσθαφαιρούμε στο δεύτερο μέλος τον όρο $H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right)$ και, από την ιδιότητα (H3), παίρνουμε :

$$\gamma\left((u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n)\right) \leq$$

$$\leq H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{y}_n)\right) - H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right)$$
$$+ H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right) - H\left(\bar{x}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right)$$

$$\Rightarrow \gamma\left((u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n)\right)$$

$$\begin{aligned}&\leq H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{y}_n)\right) - H\left(\bar{y}_n, v(\bar{y}_n), \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{x}_n) + \rho_n\right) \\ &+ m\left\{|\bar{y}_n - \bar{x}_n|\left(1 + \frac{2|\bar{x}_n - \bar{y}_n|}{\epsilon_n} + \lambda_n |n(\bar{x}_n)| + |\rho_n|\right)\right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Από (H3), η $H(x,t,p)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ως προς p, άρα: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ (όχι εξαρτούμενο από το ϵ), ώστε, αν $|p - q| < \delta$ να ισχύει $|H(x,t,p) - H(x,t,q)| < \epsilon$. Η d είναι $C^{1,1}$ σε μια γειτονιά του $\partial\Omega$, άρα η $n(x) = -\nabla d(x)$ είναι Lipschitz συνεχής εκεί, οπότε υπάρχει σταθερά $C_2 > 0$ ώστε

$$|n(\bar{y}_n) - n(\bar{x}_n)| \leq C_2 |\bar{y}_n - \bar{x}_n|,$$

για n αρκετά μεγάλα και με χρήση και της (16), έχουμε:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} + \lambda_n n(\bar{y}_n) - \frac{2(\bar{x}_n - \bar{y}_n)}{\epsilon_n} - \lambda_n n(\bar{x}_n) - \rho_n\right| \\ = \ &|\lambda_n\left(n(\bar{y}_n) - n(\bar{x}_n)\right) - \rho_n| \\ \leq \ &\lambda_n |n(\bar{y}_n) - n(\bar{x}_n)| + |2(\bar{x}_n - x_0)| \\ \leq \ &C\left(1 + \frac{2|\bar{x}_n - \bar{y}_n|}{\epsilon_n} + |\rho_n|\right) C_2 |\bar{y}_n - \bar{x}_n| + 2|\bar{x}_n - x_0| \to 0,\end{aligned}$$

με την τελευταία σύγκλιση να ισχύει λόγω του Λήμματος 1. Δηλαδή, για n αρκετά μεγάλο,

$$\left|\frac{2(\bar{x}_n-\bar{y}_n)}{\epsilon_n}+\lambda_n n(\bar{y}_n)-\frac{2(\bar{x}_n-\bar{y}_n)}{\epsilon_n}-\lambda_n n(\bar{x}_n)-\rho_n\right|<\delta.$$

Άρα από τη (17), με χρήση της ομοιόμορφης συνέχειας της H ως προς p και της σχέσης (16), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\gamma(u(\bar{x}_n)-v(\bar{y}_n)) &< \epsilon+m\Bigg\{|\bar{y}_n-\bar{x}_n|\Bigg(1+\frac{2|\bar{x}_n-\bar{y}_n|}{\epsilon_n}+C\Bigg(1+\frac{2|\bar{x}_n-\bar{y}_n|}{\epsilon_n}+|\rho_n|\Bigg)|n(\bar{x}_n)|\\ &\quad +|\rho_n|\Bigg)\Bigg\}\end{aligned}$$

για n αρκετά μεγάλο. Με χρήση αυτής ακριβώς της ανισότητας, έχουμε :

$$\begin{aligned}\gamma M_n &= \gamma\cdot\psi_n(\bar{x}_n,\bar{y}_n)\\ &= \gamma\left(u(\bar{x}_n)-v(\bar{y}_n)-\frac{|\bar{x}_n-\bar{y}_n|^2}{\epsilon_n}-\left[\left(\frac{d(\bar{x}_n)-d(\bar{y}_n)}{\alpha_n}-1\right)^-\right]^2-|\bar{x}_n-x_0|^2\right)\\ &= \gamma\left(u(\bar{x}_n)-v(\bar{y}_n)\right)-\gamma\frac{|\bar{x}_n-\bar{y}_n|^2}{\epsilon_n}-\gamma\left[\left(\frac{d(\bar{x}_n)-d(\bar{y}_n)}{\alpha_n}-1\right)^-\right]^2-\gamma|\bar{x}_n-x_0|^2\\ &< \epsilon+m\left\{|\bar{y}_n-\bar{x}_n|\left(1+\frac{2|\bar{x}_n-\bar{y}_n|}{\epsilon_n}+C\left(1+\frac{2|\bar{x}_n-\bar{y}_n|}{\epsilon_n}+|\rho_n|\right)|n(\bar{x}_n)|+|\rho_n|\right)\right\}\\ &- \gamma\frac{|\bar{x}_n-\bar{y}_n|^2}{\epsilon_n}-\gamma\left[\left(\frac{d(\bar{x}_n)-d(\bar{y}_n)}{\alpha_n}-1\right)^-\right]^2-\gamma|\bar{x}_n-x_0|^2.\end{aligned}$$

Το $\epsilon>0$ είναι τυχαίο, άρα, παίρνοντας $\epsilon\to 0$ και $n\to\infty$ και με χρήση του Λήμματος 1, προκύπτει ότι

$$\gamma\cdot\liminf_{n\to\infty}M_n\le 0,$$

άρα, από τη (13) και από το ότι $\gamma>0$, έχουμε

$$M\le\liminf_{n\to\infty}M_n\le 0,$$

άτοπο. Επομένως, η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, άρα $M\le 0$, δηλαδή

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}(u-v)(x)\le 0. \qquad \square$$

Απόδειξη του Λήμματος 1: Με χρήση της (13), έχουμε :

$$\begin{aligned}&M+\frac{|\bar{x}_n-\bar{y}_n|^2}{\epsilon_n}+\left[\left(\frac{d(\bar{x}_n)-d(\bar{y}_n)}{\alpha_n}-1\right)^-\right]^2+|\bar{x}_n-x_0|^2\\ \le\;& \liminf_{n\to\infty}M_n+\frac{|\bar{x}_n-\bar{y}_n|^2}{\epsilon_n}+\left[\left(\frac{d(\bar{x}_n)-d(\bar{y}_n)}{\alpha_n}-1\right)^-\right]^2+|\bar{x}_n-x_0|^2\\ =\;& \liminf_{n\to\infty}M_n+u(\bar{x}_n)-v(\bar{y}_n)-M_n\le u(\bar{x}_n)-v(\bar{y}_n).\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω του ότι, η $\psi_n(x,y)$ είναι, προφανώς, φθίνουσα ακολουθία συναρτήσεων, άρα και η M_n είναι φθίνουσα ακολουθία, επομένως ισχύει $M_n \geq \liminf_{n\to\infty} M_n$, δηλαδή $(\liminf_{n\to\infty} M_n) - M_n \leq 0$. Έχουμε, δηλαδή, ότι

$$M + \frac{|\bar{x}_n - \bar{y}_n|^2}{\epsilon_n} + \left[\left(\frac{d(\bar{x}_n) - d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1\right)^-\right]^2 + |\bar{x}_n - x_0|^2 \leq u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n). \tag{18}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (18) κατά μέλη με ϵ_n, λόγω του ότι $\epsilon_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και αφού όλες οι πολλαπλασιαζόμενες, με αυτό, ακολουθίες, είναι προφανώς φραγμένες (εδώ γίνεται χρήση του ότι u, v φραγμένες), προκύπτει ότι

$$|\bar{x}_n - \bar{y}_n| \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Θα αποδείξουμε τώρα, ότι $u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n) \to M$ καθώς $n \to \infty$. Έστω ότι δεν ισχύει αυτό. Λόγω της συμπάγειας του $\bar{\Omega}$ υπάρχουν υπακολουθίες των $\bar{x}_n, \bar{y}_n$ που συγκλίνουν, έστω $\bar{x}_{n_k} \to x^*, \bar{y}_{n_k} \to y^*$, για τις οποίες ισχύει, επίσης, ότι η $u(\bar{x}_{n_k}) - v(\bar{y}_{n_k})$ δεν συγκλίνει στο M, λόγω της υπόθεσής μας. Έτσι, λόγω της (18) θα ισχύει ότι $l := \lim_{k\to\infty}(u(\bar{x}_{n_k}) - v(\bar{y}_{n_k})) > M$. Αλλά $x^* = y^*$, αφού $|\bar{x}_n - \bar{y}_n| \to 0$ όταν $n \to \infty$ και από την άνω ημισυνέχεια της συνάρτησης με τύπο $(x,y) \to u(x) - v(y)$ παίρνουμε $l \leq \limsup_{k\to\infty}(u(\bar{x}_{n_k}) - v(\bar{y}_{n_k})) \leq u(x^*) - v(x^*) \leq M$, άτοπο. Έχουμε, δηλαδή, ότι

$$u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n) \to M, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Επομένως, παίρνοντας $n \to \infty$ στην (18), προκύπτει ότι

$$M + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|\bar{x}_n - \bar{y}_n|^2}{\epsilon_n} + \left[\left(\frac{d(\bar{x}_n) - d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1\right)^-\right]^2 + |\bar{x}_n - x_0|^2\right) \leq M.$$

Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, καθώς $n \to \infty$ θα ισχύει :

$$\begin{aligned}
&\frac{|\bar{x}_n - \bar{y}_n|^2}{\epsilon_n} \to 0, \\
&|\bar{x}_n - x_0|^2 \to 0, \\
&\left(\frac{d(\bar{x}_n) - d(\bar{y}_n)}{\alpha_n} - 1\right)^- \to 0.
\end{aligned}$$

Τώρα : Λόγω της άνω ημισυνέχειας της u, έχουμε :

$$\limsup_{n\to\infty} u(\bar{x}_n) \leq u(x_0)$$

αφού $\bar{x}_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$. Επίσης,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} u(\bar{x}_n) = \liminf_{n\to\infty}(u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n) + v(\bar{y}_n)) \geq \\
\geq\ &\liminf_{n\to\infty}(u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n)) + \liminf_{n\to\infty} v(\bar{y}_n) \geq M + v(x_0) = u(x_0).
\end{aligned}$$

Η προτελευταία ανισότητα ισχύει λόγω του ότι $u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n) \to M$, ενώ $\bar{y}_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$, αφού $|\bar{x}_n - \bar{y}_n| \to 0$ και $|\bar{x}_n - x_0|^2 \to 0$, οπότε, από την κάτω ημισυνέχεια της v, ισχύει ότι $\liminf_{n\to\infty} v(\bar{y}_n) \geq v(x_0)$. Δηλαδή,

$$\liminf_{n\to\infty} u(\bar{x}_n) \geq u(x_0).$$

Άρα,

$$u(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} u(\bar{x}_n) \leq \limsup_{n\to\infty} u(\bar{x}_n) \leq u(x_0),$$

δηλαδή,

$$u(\bar{x}_n) \to u(x_0), \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Επίσης, από το ότι $u(\bar{x}_n) - v(\bar{y}_n) \to M$, προκύπτει άμεσα το ότι

$$v(\bar{y}_n) \to v(x_0), \text{ καθώς } n \to \infty. \quad \square$$

Από τη στιγμή που δεν γνωρίζουμε, γενικώς, τα σύνολα Γ_1 και Γ_2 και η υπόθεση (10) είναι δύσκολο να ελεγχθεί, δίνουμε κάποιες εφαρμογές και παραλλαγές του Θεωρήματος 1 και κάποιες προσεγγίσεις στα Γ_1 και Γ_2.

Πρόταση 1 *Έστω ότι η H ικανοποιεί την $(H1)$, η ϕ είναι συνεχής, u είναι μία φραγμένη, α.η.σ. υπολύση των (6), (7) και v μία φραγμένη, κ.η.σ. υπερλύση των (8), (9). Τότε*

$$\{v < \phi\} \subset \Gamma_1^{'}, \qquad \{u > \phi\} \subset \Gamma_2^{'},$$

όπου

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{'} &= \Big\{x_0 \in \partial\Omega : \limsup_{\epsilon\to 0}\Big\{H(x,t,p+\lambda n(x)) : |x-x_0| \leq \epsilon,\ \frac{\lambda}{1+|p|} \geq \frac{1}{\epsilon},\ |t| \leq R\Big\} \\
&\quad \geq 0 \text{ για όλα τα } R > 0\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^{'} &= \Big\{x_0 \in \partial\Omega : \limsup_{\epsilon\to 0}\Big\{H(x,t,p-\lambda n(x)) : |x-x_0| \leq \epsilon,\ \frac{\lambda}{1+|p|} \geq \frac{1}{\epsilon},\ |t| \leq R\Big\} \\
&\quad \leq 0 \text{ για όλα τα } R > 0\Big\}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \{x \in \partial\Omega : v(x) < \phi(x)\}$. Θα δείξουμε ότι $x_0 \in \Gamma_1^{'}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi_\epsilon(x) = v(x) - \mu_\epsilon(x),$$

όπου

$$\mu_\epsilon(x) = -\frac{|x-x_0|^2}{\epsilon^2} - \frac{d(x)}{\epsilon^2}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Λήμμα :

Λήμμα 2 *Αν x_ϵ σημείο ελαχίστου της ψ_ϵ, τότε, καθώς $\epsilon \to 0$, ισχύει ότι*

$$x_\epsilon \to x_0, \qquad v(x_\epsilon) \to v(x_0).$$

Απόδειξη του Λήμματος 2 : Έχουμε ότι $\mu_\epsilon(x) \in C_1(\Omega)$ και $\psi_\epsilon(x) = v(x) - \mu_\epsilon(x)$. Το σημείο ελαχίστου της $v - \mu_\epsilon$ είναι το x_ϵ, για κάθε $\epsilon > 0$. Είναι

$$(v - \mu_\epsilon)(x_\epsilon) = v(x_\epsilon) + \frac{|x_\epsilon - x_0|^2}{\epsilon^2} + \frac{d(x_\epsilon)}{\epsilon^2}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_\epsilon \to x_1 \in \bar{\Omega}$, αφού $x_\epsilon \in \bar{\Omega}$ και $\bar{\Omega}$ συμπαγές. Τότε θα έχουμε ότι $|x_\epsilon - x_0|^2 \to |x_1 - x_0|^2$. Τώρα :
Έστω $|x_1 - x_0|^2 = K > 0$. Τότε, έχουμε : Έστω $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_1 < K$. Υπάρχει $M > 0$, ώστε για κάθε ϵ, $\epsilon < M$ να ισχύει

$$-\epsilon_1 < |x_\epsilon - x_0|^2 - K \Rightarrow |x_\epsilon - x_0|^2 > K - \epsilon_1 > 0.$$

Η v είναι φραγμένη, οπότε $\exists R > 0$ ώστε $|v(x_\epsilon)| \leq R$, $\forall \epsilon > 0$. Τότε, έχουμε :

$$(v - \mu_\epsilon)(x_\epsilon) \geq -R + \frac{K - \epsilon_1}{\epsilon^2}, \quad \forall \epsilon > 0,\ \epsilon < M.$$

Επιλέγουμε ϵ μικρό, ώστε $-R + \frac{K-\epsilon_1}{\epsilon^2} > v(x_0)$. Τότε, για αυτό το ϵ έχουμε :

$$(v - \mu_\epsilon)(x_\epsilon) > v(x_0) = (v - \mu_\epsilon)(x_0),$$

άτοπο, γιατί x_ϵ σημείο ελαχίστου της $v - \mu_\epsilon$. Επομένως, $|x_1 - x_0|^2 = 0$, οπότε $x_1 = x_0$, δηλαδή πράγματι

$$x_\epsilon \to x_0.$$

Μένει να αποδείξουμε την άλλη σύγκλιση. Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε

$$v(x) - \mu_\epsilon(x) \geq v(x_\epsilon) - \mu_\epsilon(x_\epsilon) \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

άρα

$$v(x_0) = v(x_0) - \mu_\epsilon(x_0) \geq v(x_\epsilon) - \mu_\epsilon(x_\epsilon) \geq v(x_\epsilon).$$

Το ϵ επιλέχτηκε τυχαία, άρα

$$v(x_0) \geq v(x_\epsilon),\ \forall \epsilon > 0,$$

επομένως

$$v(x_0) \geq \limsup_{\epsilon \to 0} v(x_\epsilon).$$

Αφού $x_\epsilon \to x_0$, λόγω της κάτω ημισυνέχειας της v, έχουμε

$$v(x_0) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} v(x_\epsilon).$$

Οπότε, έχουμε

$$v(x_0) \leq \liminf_{\epsilon\to 0} v(x_\epsilon) \leq \limsup_{\epsilon\to 0} v(x_\epsilon) \leq v(x_0),$$

άρα

$$v(x_\epsilon) \to v(x_0). \qquad \square$$

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της Πρότασης 1. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Έστω $x_\epsilon \in \Omega$. Τότε, αφού $\mu_\epsilon \in C^1(\Omega)$ και η $v - \mu_\epsilon$ έχει τοπικό ελάχιστο στο x_ϵ, από το ότι η v είναι υπερλύση ιξώδους της (8) παίρνουμε ότι

$$H\left(x_\epsilon, v(x_\epsilon), \frac{-2(x_\epsilon - x_0)}{\epsilon^2} + \frac{n(x_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) \geq 0.$$

- Έστω $x_\epsilon \in \partial\Omega$. Τότε, από το Λήμμα 2 έχουμε ότι $v(x_\epsilon) \to v(x_0)$. Επίσης, $\phi(x_\epsilon) \to \phi(x_0)$, αφού ϕ συνεχής και $x_\epsilon \to x_0$ (Λήμμα 2). Από την υπόθεση έχουμε ότι $v(x_0) < \phi(x_0)$, άρα, για ϵ αρκετά μικρό, ισχύει ότι $v(x_\epsilon) < \phi(x_\epsilon)$. Τότε, αφού $\mu_\epsilon \in C^1(\Omega)$ και η $v - \mu_\epsilon$ έχει τοπικό ελάχιστο στο x_ϵ, από το ότι η v είναι υπερλύση ιξώδους της (9) παίρνουμε, για ϵ αρκετά μικρό, ότι

$$H\left(x_\epsilon, v(x_\epsilon), \frac{-2(x_\epsilon - x_0)}{\epsilon^2} + \frac{n(x_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) \geq 0.$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι, αν θεωρήσουμε κάποιο ϵ αρκετά μικρό, τότε, σε κάθε περίπτωση θα ισχύει ότι

$$H\left(x_\epsilon, v(x_\epsilon), \frac{-2(x_\epsilon - x_0)}{\epsilon^2} + \frac{n(x_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) \geq 0.$$

Τώρα: το x_ϵ είναι κοντά στο x_0, για ϵ αρκετά μικρό, ενώ, θεωρώντας ότι η παραπάνω Χαμιλτονιανή είναι της μορφής $H(x, t, p + \lambda n(x))$, έχουμε ότι

$$\frac{\lambda}{1 + |p|} = \frac{\frac{1}{\epsilon^2}}{1 + \left|\frac{-2(x_\epsilon - x_0)}{\epsilon^2}\right|} = \frac{1}{\epsilon^2 + 2|x_\epsilon - x_0|},$$

άρα, για ϵ αρκετά μικρό, το $\frac{\lambda}{1+|p|}$ γίνεται όσο μεγάλο θέλουμε. Επιπλέον, αφού v φραγμένη, υπάρχει R ώστε $|v(x_\epsilon)| \leq R$, για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα, για ϵ αρκετά μικρό, έχουμε ότι

$$H\left(x_\epsilon, v(x_\epsilon), \frac{-2(x_\epsilon - x_0)}{\epsilon^2} + \frac{n(x_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) \in \Big\{H(x, t, p + \lambda n(x)) : |x - x_0| \leq \epsilon_1, \frac{\lambda}{1 + |p|} \geq \frac{1}{\epsilon_1},\ |t| \leq R\Big\}$$

για κάποιο τυχαίο $\epsilon_1 > 0$ (για το τυχαίο ϵ_1 επιλέγουμε κατάλληλα μικρό ϵ). Οπότε,

$$\sup\left\{H(x,t,p+\lambda n(x)) : |x-x_0| \le \epsilon_1,\ \frac{\lambda}{1+|p|} \ge \frac{1}{\epsilon_1},\ |t| \le R\right\} \ge 0,$$

για τυχαίο $\epsilon_1 > 0$. Άρα,

$$\limsup_{\epsilon_1 \to 0}\left\{H(x,t,p+\lambda n(x)) : |x-x_0| \le \epsilon_1,\ \frac{\lambda}{1+|p|} \ge \frac{1}{\epsilon_1},\ |t| \le R\right\} \ge 0,$$

επομένως $x_0 \in \Gamma_1'$. Δείξαμε, λοιπόν, ότι $\{v < \phi\} \subset \Gamma_1'$. Ακριβώς παρόμοια απόδειξη εφαρμόζεται για να αποδειχθεί και το ότι $\{u > \phi\} \subset \Gamma_2'$. $\square$

Πόρισμα 1 *Υποθέτουμε ότι η H ικανοποιεί τις (H1)-(H3), ότι η ϕ είναι συνεχής και ότι η (H4) ισχύει στο σύνολο Γ_1' ενώ η (H5) ισχύει στο σύνολο Γ_2'. Έστω u φραγμένη α.η.σ. υπολύση των (6),(7), v φραγμένη κ.η.σ. υπερλύση των (8),(9). Τότε*

$$u \le v \quad \textit{στο}\ \Omega.$$

Απόδειξη: Θα τροποποιήσουμε την v σε μία συνάρτηση $\tilde{v}$ (και μετά τη u σε μία συνάρτηση $\tilde{u}$), η οποία θα ικανοποιεί τη σχέση (10) του Θεωρήματος 1 στο σύνολο $A = \{x \in \partial\Omega,\ \tilde{u}(x) > \phi(x)\}$ (τότε η (10) θα ικανοποιείται για την $\tilde{v}$ και στο σύνολο $\Gamma_2 = \{x \in \partial\Omega,\ \tilde{u}(x) > \phi(x),\ \tilde{v}(x) \ge \phi(x)\}$ του Θεωρήματος 1), καθώς και τις άλλες σχέσεις του εν λόγω Θεωρήματος. Ορίζουμε $\tilde{v}$ ως εξής :

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{αν } x \notin \Gamma_2', \\ \liminf_{y \to x, y \in \Omega} v(y) & \text{αν } x \in \Gamma_2'. \end{cases}$$

Αν $x \in \Gamma_2'$, τότε έχουμε :

$$\liminf_{y \to x, y \in \Omega} \tilde{v}(y) = \liminf_{y \to x, y \in \Omega} v(y) = \tilde{v}(x),$$

άρα ισχύει για την $\tilde{v}$ η (10) στο Γ_2'. Επίσης, $A \subset \Gamma_2'$, γιατί, όπως θα δείξουμε, η $\tilde{v}$ είναι φραγμένη *κ.η.σ.* υπερλύση των (8) και (9) ενώ, με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $\tilde{u}$ είναι φραγμένη *α.η.σ.* υπολύση των (6) και (7). Άρα, από την Πρόταση 1 έχουμε ότι $\{\tilde{u} > \phi\} \subset {\Gamma_2}'$. Επομένως, ισχύει για την $\tilde{v}$ η (10) στο A, οπότε ισχύει και στο Γ_2. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι η $\tilde{v}$ είναι φραγμένη *κ.η.σ.* υπερλύση των (8), (9) και ότι ισχύει η (H5) στο Γ_2. Το τελευταίο είναι άμεσο γιατί η (H5) ισχύει στο Γ_2', από υπόθεση, άρα αφού $A \subset \Gamma_2'$, έχουμε ότι η (H5) ισχύει στο A, άρα και στο Γ_2.

Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι τα Γ_1' και Γ_2', από τον τρόπο που ορίστηκαν στην Πρόταση 1, είναι, προφανώς, κλειστά σύνολα, αλλά είναι επίσης ανοιχτά, λόγω των υποθέσεων (H4) και (H5) που ισχύουν σε αυτά, αντίστοιχα. Επομένως, από γνωστή πρόταση της Τοπολογίας, τα Γ_1' και Γ_2', μπορούν να γραφούν και τα δύο σαν ενώσεις συνεκτικών συνιστωσών του $\partial\Omega$ (βλέπε [8], σελ.139-140). Αυτή η παρατήρηση δείχνει ότι η $\tilde{v}$ είναι $\kappa.\eta.\sigma.$ (γιατί, αν $x \notin \Gamma_2'$, τότε $\tilde{v}(x) = v(x)$, άρα $\tilde{v}$ $\kappa.\eta.\sigma.$, αφού είναι η v. Αν $x \in \Gamma_2'$, τότε το x ανήκει σε κάποια συνεκτική συνιστώσα του $\partial\Omega$. Σε αυτή, η v είναι $\kappa.\eta.\sigma.$, άρα είναι και η $\tilde{v}(x) = \liminf_{y\to x, y\in\Omega} v(y)$).

Τώρα, έχουμε : Έστω $x \in \Gamma_2'$. Τότε, λόγω του ότι $\{v(y) : y \in \Omega, |y-x| \le r\} \subset \{v(y) : y \in \bar{\Omega}, |y-x| \le r\}$, είναι:

$$\begin{aligned}
& \inf\{v(y) : y \in \Omega, |y-x| \le r\} \ge \inf\{v(y) : y \in \bar{\Omega}, |y-x| \le r\} \\
\Rightarrow\ & \lim_{r\to 0} \inf\{v(y) : y \in \Omega, |y-x| \le r\} \ge \lim_{r\to 0} \inf\{v(y) : y \in \bar{\Omega}, |y-x| \le r\} \\
\Rightarrow\ & \liminf_{y\to x, y\in\Omega} v(y) \ge \liminf_{y\to x} v(y) \\
\Rightarrow\ & \tilde{v}(x) \ge v(x) \text{ στο } \Gamma_2',
\end{aligned}$$

με την τελευταία σχέση να ισχύει λόγω του ότι η v είναι $\kappa.\eta.\sigma.$. Επομένως ισχύει ότι

$$\tilde{v}(x) \ge v(x) \ \text{ στο } \ \bar{\Omega}.$$

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι η $\tilde{v}$ είναι υπερλύση ιξώδους της (9) στο Γ_2' (στο $(\Gamma_2')^c$ είναι υπερλύση των (8), (9), αφού είναι ίση με την $v(x)$ και η v είναι υπερλύση των (8) και (9)). Αν $\tilde{v}(x) \ge \phi(x)$, τότε, προφανώς, η (9) ικανοποιείται, υπό την έννοια του ιξώδους. Επομένως, αρκεί να το ελέγξουμε μόνο στα σημεία x, όπου $\tilde{v}(x) < \phi(x)$. Ισχυριζόμαστε ότι σε αυτά τα σημεία ισχύει ότι $\tilde{v}(x) = v(x)$. Πράγματι ας υποθέσουμε, για άτοπο, ότι $\tilde{v}(x) > v(x)$ και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση ψ_ϵ, η οποία ορίζεται ως εξής :

$$\psi_\epsilon(y) = v(y) + \frac{|x-y|^2}{\epsilon^2} - \frac{d(y)}{\epsilon^2}.$$

Η ψ_ϵ έχει ένα σημείο τοπικού ελαχίστου στο y_ϵ. Όπως και στην Πρόταση 1, με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $y_\epsilon \to x$ και $v(y_\epsilon) \to v(x)$. Έχουμε ότι $\tilde{v}(x) > v(x)$, άρα, εξ' ορισμού της $\tilde{v}$, το $x \in {\Gamma_2}' \subset \partial\Omega$, επομένως, αφού $y_\epsilon \to x$, θα έχουμε ότι $y_\epsilon \in \partial\Omega$, για ϵ αρκετά μικρό. Άρα έχουμε : $v(y_\epsilon) \to v(x)$ και $\phi(y_\epsilon) \to \phi(x)$, αφού ϕ συνεχής, ενώ $v(x) < \tilde{v}(x) < \phi(x)$, οπότε, για ϵ αρκετά μικρό, έχουμε ότι $v(y_\epsilon) < \phi(y_\epsilon)$. Επομένως, αφού $\psi_\epsilon(y) = v(y) - \mu_\epsilon(y)$, όπου

$$\mu_\epsilon(y) = -\frac{|x-y|^2}{\epsilon^2} + \frac{d(y)}{\epsilon^2} \in C^1,$$

και η $v(y) - \mu_\epsilon(y)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $y_\epsilon \in \partial\Omega$, από το ότι η v είναι υπερλύση ιξώδους της (9) και $v(y_\epsilon) < \phi(y_\epsilon)$, για ϵ αρκετά μικρό, έχουμε ότι

$$H\left(y_\epsilon, v(y_\epsilon), \frac{2(y_\epsilon - x)}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2} n(y_\epsilon)\right) \ge 0. \tag{19}$$

Τώρα : Υπάρχει $R > 0$ ώστε $|v(y_\epsilon)| \le R \ \ \forall\epsilon > 0$, αφού v φραγμένη. Έχουμε ότι $x \in \Gamma_2'$, άρα, από υπόθεση, ισχύει για αυτό η (H5), δηλαδή :

$\exists C$ τέτοια ώστε, αν $|t| \leq R$, $|x-y| \leq 1/C$, $y \in \bar{\Omega}$ και $\lambda \geq C(1+|p|)$, τότε

$$H(y,t,p-\lambda n(y)) < 0.$$

Όμως, $y_\epsilon \to x$. Άρα, για ϵ αρκετά μικρό, έχουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις $|v(y_\epsilon)| \leq R$, $|x-y_\epsilon| \leq \frac{1}{C}$, $y_\epsilon \in \bar{\Omega}$ και $\frac{1}{\epsilon^2} \geq C(1+|p|)$, επομένως , για $p = \frac{2(y_\epsilon - x)}{\epsilon^2}$, έχουμε ότι

$$H\left(y_\epsilon, v(y_\epsilon), \frac{2(y_\epsilon - x)}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2} n(y_\epsilon)\right) < 0,$$

άτοπο λόγω της (19). Επομένως, $\tilde{v}(x) = v(x)$, στα σημεία όπου $\tilde{v}(x) < \phi(x)$. Άρα, αφού η v είναι υπερλύση, και η $\tilde{v}$ είναι υπερλύση της (9) σε αυτά τα σημεία. Οπότε, η $\tilde{v}$ είναι υπερλύση της (9) στο Γ_2' (γιατί τα σημεία y, τέτοια ώστε $\tilde{v}(y) \geq \phi(y)$ δεν παίζουν κανένα ρόλο, όταν κοιτάμε σε ένα ελάχιστο σημείο της $\tilde{v} - \phi$, $\phi \in C^1$, το οποίο επιτυγχάνεται στο x, με $\tilde{v}(x) < \phi(x)$).
Τελικά, για να φτάσουμε στο ζητούμενο, δουλεύουμε ομοίως και με την u, ορίζοντας την

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{αν } x \notin \Gamma_1', \\ \limsup_{y \to x, y \in \Omega} u(y) & \text{αν } x \in \Gamma_1', \end{cases}$$

και καταλήγουμε στο ότι η $\tilde{u}$ είναι φραγμένη $\alpha.\eta.\sigma.$ υπολύση των (6) και (7), ότι ισχύει η (H4) στο $\Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega,\ \tilde{u}(x) \leq \phi(x),\ \tilde{v}(x) < \phi(x)\}$ καθώς και η (10) στο σύνολο Γ_1', άρα και στο Γ_1. Οπότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1, προκύπτει ότι

$$\tilde{u} \leq \tilde{v} \text{ στο } \bar{\Omega},$$

επομένως

$$u \leq v \text{ στο } \Omega. \qquad \square$$

2.2 Προβλήματα Ελέγχου με Χρόνο Εξόδου και συνθήκες για μοναδικότητα λύσης

Θεωρούμε ένα σύστημα, στο οποίο η κατάσταση δίνεται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy_x(t)}{dt} + b\left(y_x(t), v(t)\right) = 0, \quad y_x(0) = x \in \Omega.$$

Με τον έλεγχο $v(\cdot)$ συνδέουμε τη συνάρτηση κόστους

$$J\left(x, v(\cdot)\right) = \int_0^\tau f\left(y_x(t), v(t)\right) e^{-\lambda t} dt + \phi\left(y_x(\tau)\right) e^{-\lambda \tau},$$

όπου ϕ, f, b είναι Lipschitz-συνεχείς συναρτήσεις, λ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και $v(\cdot)$ είναι οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση με τιμή στο

V, όπου V κάποιος συμπαγής μετρικός χώρος (ο χώρος των ελέγχων). Τέλος, με $\tau(\equiv \tau(x, v(\cdot)))$ συμβολίζουμε τον πρώτο χρόνο εξόδου της τροχιάς $y_x(t)$ από το ανοιχτό σύνολο Ω.

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικούς χρόνους στους οποίους σταματάμε, για παράδειγμα, τον πρώτο χρόνο εξόδου από το $\bar{\Omega}$, αλλά ο τ παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση αξίας

$$u(x) = \inf\left\{J(x, v(\cdot)) : v(\cdot) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+, V)\right\}, \tag{20}$$

τότε έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες για την u:
Αν θέσουμε

$$v_*(x) = \liminf_{y \to x, y \in \bar{\Omega}} v(y), \quad v^*(x) = \limsup_{y \to x, y \in \bar{\Omega}} v(y),$$

και

$$u_0(x) = \begin{cases} u_*(x) & \text{για } x \in \Omega, \\ \liminf_{y \to x, y \in \Omega} u(y) & \text{για } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{21}$$

και

$$H(x, t, p) = \sup_{v \in V}\{b(x, v) \cdot p + \lambda t - f(x, v)\},$$

τότε έχουμε ότι :

- Η u_0 είναι υπερλύση των (8),(9),
- Η $(u_0)^*$ είναι υπολύση των (6),(7),
- $((u_0)^*)_* = u_0 \qquad$ στο $\bar{\Omega}$.

(Για μία απόδειξη αυτών, βλέπε [4], σελ.1138). Επομένως, η u_0 έχει μία ιδιαίτερη ιδιότητα, ανάμεσα στις υπο- και υπερλύσεις των (6),(7),(8),(9), την τελευταία από τις παραπάνω τρεις, και αυτό μπορεί να είναι ένα κριτήριο μοναδικότητας.

Όπως στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να θέσουμε και εδώ το ερώτημα : πότε είναι δυνατόν να συγκρίνουμε την υπολύση $(u_0)^*$ και την υπερλύση u_0; Αν αυτό είναι δυνατόν, παίρνουμε $(u_0)^* \leq u_0$ και, αφού ισχύει ότι $u_0 \leq (u_0)^*$, προκύπτει ότι

$$u_0 = (u_0)^*.$$

Η u_0 είναι *κ.η.σ.*, αφού είναι υπερλύση ιξώδους των (8), (9), άρα $u_0 = (u_0)_*$, οπότε έχουμε ότι

$$u_0 = (u_0)^* = (u_0)_* \quad \text{στο } \bar{\Omega},$$

δηλαδή

$$\liminf_{y \to x, y \in \bar{\Omega}} u_0(y) = \limsup_{y \to x, y \in \bar{\Omega}} u_0(y) = u_0(x), \quad \text{για κάθε } x \in \bar{\Omega},$$

επομένως

$$u_0 \in C(\bar{\Omega}).$$

Για να γίνει αυτή η σύγκριση υπολύσης και υπερλύσης, αρκεί να θεωρήσουμε ότι ισχύουν κάποιες συνθήκες για την b στο σύνορο, οι οποίες βεβαιώνουν ότι η (H4) ισχύει στο ${\Gamma_1}'$ και η (H5) ισχύει στο ${\Gamma_2}'$. Αυτές οι συνθήκες είναι οι εξής :

(H6) $\forall x \in \partial\Omega$, αν υπάρχει $v \in V$ με $b(x,v)\cdot n(x) \geq 0$, τότε υπάρχει $v' \in V$ με $b(x,v')\cdot n(x) > 0$.

(H7) $\forall x \in \partial\Omega$, αν για όλα τα $v \in V$ ισχύει ότι $b(x,v)\cdot n(x) \geq 0$, τότε, για όλα τα $v \in V$ ισχύει ότι $b(x,v)\cdot n(x) > 0$.

(Για τη φυσική σημασία αυτών, βλέπε [6], σελ.8). Έχουμε, τώρα, τα παρακάτω Λήμματα :

Λήμμα 3 *Αν $x \in {\Gamma_1}'$, τότε, για κάποιο $v \in V$, έχουμε ότι $b(x,v)\cdot n(x) \geq 0$.*

Απόδειξη: Έστω $x \in {\Gamma_1}'$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$X(y) = v(y) + \frac{|y-x|^2}{\epsilon^2} + C\cdot d(y),$$

όπου ϵ, C θετικές παράμετροι και v φραγμένη *κ.η.σ.* υπερλύση των (8), (9). Η $X(y)$ είναι *κ.η.σ.*, λόγω του ότι η $v(y)$ είναι *κ.η.σ.*. Εξ' αιτίας αυτού και του ότι το $\bar{\Omega}$ είναι συμπαγές, η $X(y)$ λαμβάνει ελάχιστο σε ένα σημείο y_ϵ. Έτσι, έχουμε :

$$\begin{aligned} & v(y_\epsilon) + \frac{|y_\epsilon - x|^2}{\epsilon^2} + Cd(y_\epsilon) = X(y_\epsilon) \leq X(x) = v(x) \\ \Rightarrow \quad & v(y_\epsilon) + \frac{|y_\epsilon - x|^2}{\epsilon^2} + Cd(y_\epsilon) \leq v(x). \end{aligned}$$

Ακριβώς όπως στο Λήμμα 2, προκύπτει ότι $y_\epsilon \to x$ και $v(y_\epsilon) \to v(x)$, καθώς $\epsilon \to 0$. Οπότε, παίρνοντας $\epsilon \to 0$ στην παραπάνω ανισότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} & 0 \leq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{|y_\epsilon - x|^2}{\epsilon^2} + Cd(x) \leq 0 \\ \Rightarrow \quad & \lim_{\epsilon\to 0} \frac{|y_\epsilon - x|^2}{\epsilon^2} = 0. \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\epsilon > 0$,

$$\frac{|y_\epsilon - x|^2}{\epsilon^2} \leq K.$$

Έστω $\epsilon_1 > 0$. Για $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό, έχουμε ότι $|y_\epsilon - x| < \epsilon_1$, αφού $y_\epsilon \to x$ καθώς $\epsilon \to 0$. Επίσης, για C αρκετά μεγάλο, είναι

$$\frac{C}{1 + \left| -\frac{2(y_\epsilon - x)}{\epsilon} \right|} \geq \frac{1}{\epsilon_1}.$$

Επίσης, υπάρχει $R > 0$ ώστε $|v(y_\epsilon)| \leq R$ για κάθε $\epsilon > 0$, αφού η v είναι φραγμένη. Άρα, για ϵ αρκετά μικρό και C αρκετά μεγάλο,

$$H\left(y_\epsilon, v(y_\epsilon), -\frac{2(y_\epsilon - x)}{\epsilon} + Cn(y_\epsilon)\right) \in \left\{H(y,t,p+\lambda n(y)) : |y-x| \leq \epsilon_1,\ \frac{\lambda}{1+|p|} \geq \frac{1}{\epsilon_1},\ |t| \leq R\right\},$$

για τυχαίο $\epsilon_1 > 0$. Επομένως, αφού $x \in {\Gamma_1}'$, θα έχουμε ότι

$$H\left(y_\epsilon, v(y_\epsilon), -\frac{2(y_\epsilon - x)}{\epsilon} + Cn(y_\epsilon)\right) \geq 0,$$

για ϵ αρκετά μικρό και C αρκετά μεγάλο. Δηλαδή,

$$\sup_{v' \in V}\left\{b(y_\epsilon, v') \cdot \left(-\frac{2(y_\epsilon - x)}{\epsilon} + Cn(y_\epsilon)\right) + \lambda v(y_\epsilon) - f(y_\epsilon, v')\right\} \geq 0,$$

για ϵ αρκετά μικρό και C αρκετά μεγάλο. Παίρνοντας $\epsilon \to 0$ και $C \to +\infty$ στην παραπάνω ανισότητα, προκύπτει ότι

$$\sup_{v' \in V}\left\{b(x, v') \cdot n(x)\right\} \geq 0,$$

γιατί, αν $\sup_{v' \in V}\{b(x,v') \cdot n(x)\} < 0$, τότε

$$\lim_{C \to +\infty} \sup_{v' \in V}\left\{Cb(x, v') \cdot n(x)\right\} = -\infty,$$

οπότε η ανισότητα δεν θα ίσχυε (εδώ ακριβώς χρησιμοποιούμε και το ότι ο όρος $\frac{2(y_\epsilon - x)}{\epsilon}$ είναι φραγμένος από το $2\sqrt{K}$). Έτσι, επειδή το V είναι συμπαγές, παίρνουμε ότι υπάρχει $v'' \in V$ ώστε

$$b(x, v'') \cdot n(x) = \sup_{v' \in V}\left\{b(x, v') \cdot n(x)\right\} \geq 0. \qquad \square$$

Λήμμα 4 *Αν $x \in {\Gamma_1}'$ και ισχύει η συνθήκη (H6), τότε, για αυτό το x, θα ισχύει η συνθήκη (H4).*

Απόδειξη: Έστω $x \in {\Gamma_1}'$. Τότε, από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι, υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $b(x,v) \cdot n(x) \geq 0$. Έχουμε ότι ισχύει η (H6), άρα υπάρχει v' ώστε $b(x,v') \cdot n(x) > 0$. Η

$$\psi : y \longrightarrow b(y, v') \cdot n(y)$$

είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$, αφού οι n, b είναι Lipschitz συνεχείς. Είναι $\psi(x) > 0$. Έστω $R > 0$. Τότε υπάρχει C τέτοιο ώστε, αν $|x - y| \leq \frac{1}{C}$, $y \in \bar{\Omega}$, να ισχύει ότι, υπάρχει $\nu > 0$ και

$$\psi(y) \geq \nu. \tag{22}$$

Επιλέγουμε, τώρα, $C' \geq C$ αρκετά μεγάλο, ώστε, για $|t| \leq R,\ |x-y| \leq \frac{1}{C'},\ y \in \bar{\Omega}$ και για $\kappa \geq C'(1+|p|)$, να είναι

$$b(y,v') \cdot p + C'(1+|p|) \cdot \nu - \lambda R - f(y,v') > 0. \tag{23}$$

Τότε, για $|t| \leq R,\ |x-y| \leq \frac{1}{C'},\ y \in \bar{\Omega}$ και για $\kappa \geq C'(1+|p|)$, με χρήση των (22) και (23), έχουμε :

$$\begin{aligned} H(y,t,p+\kappa \cdot n(y)) &= \sup_{v \in V} \{b(y,v)(p+\kappa \cdot n(y)) + \lambda t - f(y,v)\} \\ &\geq b(y,v')(p+\kappa \cdot n(y)) + \lambda t - f(y,v') \\ &= b(y,v') \cdot p + \kappa \cdot b(y,v') \cdot n(y) + \lambda t - f(y,v') \\ &\geq b(y,v') \cdot p + C'(1+|p|) \cdot \nu - \lambda R - f(y,v') > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow H(y,t,p+\kappa \cdot n(y)) > 0.$

Το $R > 0$ επιλέχθηκε τυχαία, άρα προκύπτει ότι, $\forall R > 0\ \exists C$ τέτοιο ώστε, αν $|t| \leq R,\ |x-y| \leq \frac{1}{C},\ y \in \bar{\Omega}$ και $\kappa \geq C(1+|p|)$, να ισχύει ότι

$$H(y,t,p+\kappa \cdot n(y)) > 0.$$

Επομένως, ισχύει η (H4) για το x. □

Με βάση το Λήμμα 4, έχουμε άμεσα το ακόλουθο Πόρισμα :

Πόρισμα 2 *Αν ισχύει η συνθήκη (H6), τότε ισχύει η συνθήκη (H4) στο* $\Gamma_1{}'$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η (H7) μας δίνει ότι ισχύει η (H5) στο $\Gamma_2{}'$ (προφανώς η (H7) είναι ισοδύναμη με την πρόταση : $\forall x \in \partial\Omega$, αν υπάρχει $v \in V$ με $b(x,v) \cdot n(x) \leq 0$, τότε υπάρχει $v' \in V$ με $b(x,v') \cdot n(x) < 0$. Από εδώ φαίνεται η αναλογία της (H7) με την (H6)). Επομένως, έχουμε την παρακάτω εκδοχή του Πορίσματος 1 :

Πρόταση 2 *Υποθέτουμε ότι* $\lambda > 0, f, b_i \in W^{1,\infty}(\Omega),\ \phi \in C(\partial\Omega)$ *και ισχύουν οι (H6) και (H7), τότε η* u_0 *που ορίζεται από τις (20), (21) είναι συνεχής στο* $\bar{\Omega}$ *και είναι η μοναδική λύση ιξώδους της*

$$H(x,u,Du) = 0 \quad \text{στο}\ \Omega,$$

με τις γενικευμένες συνοριακές συνθήκες Dirichlet (7) και (9).

Παρατήρηση: Στην Πρόταση 2, η μοναδικότητα στο $\bar{\Omega}$ ισχύει για την κλάση συναρτήσεων οι οποίες, είτε είναι συνεχείς στο $\bar{\Omega}$, είτε ικανοποιούν τη σχέση

$$u(x) = \liminf_{y \to x, y \in \Omega} u(y) \quad \text{στο}\ \partial\Omega.$$

Αν δεν γίνει κάποια υπόθεση για το σύνορο, η μοναδικότητα ισχύει στο Ω (αποδεικνύεται ότι κάθε $\alpha.\eta.\sigma.$ υπολύση είναι μικρότερη από την u_0 στο Ω και κάθε $\kappa.\eta.\sigma.$ υπερλύση είναι μεγαλύτερη από την u_0 σε αυτό. Δηλαδή η u_0 είναι η μέγιστη υπολύση και η ελάχιστη υπερλύση της εξίσωσης στο Ω).

3 Μοναδικότητα και η πλήρης λύση για χρονο-βέλτιστο έλεγχο

Θα αναφερθούμε στην περίπτωση του προβλήματος χρονο-βέλτιστου ελέγχου (βλέπε [1]) και θα δώσουμε κάποια αποτελέσματα μοναδικότητας, τα οποία επιτρέπουν για τη λύση να είναι ασυνεχής. Σε αυτού του είδους τα προβλήματα, μας δίνεται ένα σύνολο-στόχος $T \subset \mathbb{R}^N$, για το οποίο έχουμε ότι είναι κλειστό, μη-κενό και το σύνορό του ∂T είναι φραγμένο. Γενικά, η αρχική κατάσταση x είναι στο $T^c := \mathbb{R}^N \setminus T$ και η δυναμική της σταματάει και το αποτέλεσμα υπολογίζεται, όταν το σύστημα φτάσει είτε το T, είτε το εσωτερικό του $int(T)$. Γι' αυτό το λόγο ορίζουμε, για $\alpha \in A$, τον χρόνο εξόδου από το T^c (ή χρόνο εισόδου στο T),

$$t_x(\alpha) := \begin{cases} +\infty & \text{αν } \{t : y_x(t,\alpha) \in T\} = \emptyset, \\ \min\{t : y_x(t,\alpha) \in T\} & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

και τον χρόνο εξόδου από το $\overline{T^c}$ (ή χρόνο εισόδου στο $int(T)$),

$$\hat{t}_x(\alpha) := \begin{cases} +\infty & \text{αν } \{t : y_x(t,\alpha) \in int(T)\} = \emptyset, \\ \inf\{t : y_x(t,\alpha) \in int(T)\} & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα θεωρήσουμε τις " εκπτωτικές " συναρτήσεις αξίας

$$v(x) = \inf_{\alpha \in A} \int_0^{t_x(\alpha)} e^{-s} ds, \qquad \hat{v}(x) = \inf_{\alpha \in A} \int_0^{\hat{t}_x(\alpha)} e^{-s} ds.$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f που ορίζει το σύστημα είναι συνεχής σε όλες τις μεταβλητές και Lipschitz ως προς τις μεταβλητές κατάστασης, το γνωστό σύνολο B είναι συμπαγές και ο στόχος T έχει τις ιδιότητες που αναφέραμε προηγουμένως.

Οι v και $\hat{v}$ λύνουν και οι δύο το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u + H(x, Du) = 0 & \text{στο } T^c =: \Omega, \\ u_* \geq 0 & \text{στο } \partial T, \\ \min\Big(u^*, u + H(x, Du)\Big) \leq 0 & \text{στο } \partial T, \end{cases} \tag{24}$$

όπου

$$H(x,p) := \sup_{\alpha \in B}\{-f(x,\alpha) \cdot p\} - 1.$$

Η HJB εξίσωση στο T^c είναι υπό την έννοια των μη-συνεχών λύσεων ιξώδους, Ορισμός 4, οι u_*, u^* είναι οι ημισυνεχείς φάκελοι της u και η δεύτερη συνοριακή συνθήκη στο ∂T είναι υπό την έννοια του ιξώδους. Το ότι οι v και $\hat{v}$ είναι πράγματι λύσεις αυτού προκύπτει από Θεώρημα (βλέπε [1], σελ.324) και από το γεγονός κατά το οποίο $v, \hat{v} \geq 0$, οπότε δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε υπερλύσεις υπό την έννοια του ιξώδους στο σύνορο. Καλούμε υπερλύση του

(24) μία υπερλύση $\bar{u} \in BLSC(\bar{\Omega})$ της HJB εξίσωσης, που ικανοποιεί την πρώτη συνοριακή συνθήκη $\bar{u} \geq 0$. Καλούμε υπολύση του (24) μία υπολύση $\underline{u} \in BUSC(\bar{\Omega})$ της HJB εξίσωσης, που ικανοποιεί τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη $\min(\underline{u}, \underline{u} + H) \leq 0$, ενώ, λύση του (24) είναι μία συνάρτηση u, τέτοια ώστε ο u_* είναι υπερλύση και ο u^* υπολύση του (24).

Πλήρης λύση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών καλείται μία συνάρτηση που είναι η ελάχιστη υπερλύση και η μέγιστη υπολύση αυτού. Η φυσική επέκταση αυτής της έννοιας σε μη-συνεχείς λύσεις είναι η ακόλουθη :

Ορισμός 5 *Μία τοπικά φραγμένη συνάρτηση w είναι μία πλήρης λύση του (24) αν η w_* είναι η ελάχιστη υπερλύση και η w^* είναι η μέγιστη υπολύση αυτού. Δηλαδή, όταν η w είναι μία λύση του (24) και για κάθε υπολύση $\underline{u}$ και υπερλύση $\bar{u}$ ισχύουν οι σχέσεις*

$$w_* \leq \bar{u}, \qquad \underline{u} \leq w^*.$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το ακόλουθο :

Θεώρημα 2 *Υπό τις προηγούμενες υποθέσεις, η $\hat{v}$ είναι η μέγιστη υπολύση του (24). Αν, επιπλέον, το T είναι η θήκη του εσωτερικού του, δηλαδή*

$$T = \overline{int(T)}, \tag{25}$$

τότε η $\hat{v}$ είναι μία πλήρης λύση.

Πριν να δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2, παραθέτουμε μία συνέπεια αυτού, το ακόλουθο Πόρισμα :

Πόρισμα 3 *Υπό τις προηγούμενες υποθέσεις και την (25),*

(i) *η $\hat{v}$ είναι η μοναδική άνω ημισυνεχής πλήρης λύση του (24).*

(ii) *για κάθε λύση u του (24),*

$$\hat{v}_* \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \hat{v},$$

ώστε $u(x) = v(x) = \hat{v}(x)$ σε κάθε σημείο x όπου η $\hat{v}$ είναι συνεχής.

(iii) *Η $\hat{v}_* = v_*$ είναι η μοναδική κάτω ημισυνεχής λύση του (24). Επιπλέον, το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της είναι ισχνό (ή πρώτης κατηγορίας του Baire) και το σύνολο των σημείων συνέχειάς της είναι πυκνό.*

Απόδειξη : (i) Η $\hat{v}$ είναι άνω ημισυνεχής, γιατί από το Θεώρημα 2 είναι μία υπολύση του (24) και οι υπολύσεις του (24) ανήκουν, εξ' ορισμού, στο $BUSC(\bar{\Omega})$. Επίσης, πάλι από το Θεώρημα 2, έχουμε ότι είναι πλήρης λύση και μάλιστα η μοναδική *α.η.σ.* πλήρης λύση, αφού πρέπει να είναι η μέγιστη υπολύση του (24).
(ii) Έστω u μία λύση του (24), άρα η u_* είναι υπερλύση και η u^* υπολύση

αυτού. Η $\hat{v}$, από το Θεώρημα 2, είναι πλήρης λύση, άρα, εξ' ορισμού, θα έχουμε ότι

$$\hat{v}_* \leq u_* \qquad \text{και} \qquad u^* \leq \hat{v}^* = \hat{v},$$

άρα

$$\hat{v}_* \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \hat{v}.$$

Αν στο σημείο x η $\hat{v}$ είναι συνεχής, τότε $\hat{v}^*(x) = \hat{v}_*(x) = \hat{v}(x)$, οπότε, από την ανισότητα αυτή έχουμε ότι $u(x) = \hat{v}(x)$, για κάθε λύση u του (24). Επομένως, $u(x) = v(x) = \hat{v}(x)$.

(iii) Η $\hat{v}_*$ είναι η ελάχιστη υπερλύση του (24), αφού η $\hat{v}$ είναι μία πλήρης λύση, σύμφωνα με το Θεώρημα 2. Επιπλέον, σύμφωνα με άλλο Θεώρημα (βλέπε [1], σελ. 313), η v_* είναι, επίσης, η ελάχιστη υπερλύση αυτού. Επομένως $\hat{v}_* = v_*$. Ακόμα, από το ίδιο Θεώρημα προκύπτει ότι η v_* είναι πράγματι λύση του (24). Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα, έστω $w = w_*$ μία λύση του συστήματος. Εξ' ορισμού της πλήρης λύσης, έχουμε ότι

$$\hat{v}_* \leq w_* = w \qquad \text{και} \qquad w^* \leq \hat{v}^*. \tag{26}$$

Από τη δεύτερη ανισότητα της (26) και από το ότι η $\hat{v}$ είναι $\alpha.\eta.\sigma.$ παίρνουμε

$$w^* \leq \hat{v} \Rightarrow (w^*)_* \leq \hat{v}_*. \tag{27}$$

Επίσης, $w \leq w^*$ και, από το ότι η w είναι $\kappa.\eta.\sigma.$, παίρνουμε

$$w_* \leq (w^*)_* \Rightarrow w \leq (w^*)_*. \tag{28}$$

Άρα, από τις (27) και (28),

$$w \leq (w^*)_* \leq \hat{v}_*. \tag{29}$$

Επομένως, από την πρώτη ανισότητα της (26) και από την (29) προκύπτει το ζητούμενο, δηλαδή ότι

$$w = \hat{v}_*.$$

Ένα σύνολο λέγεται ισχνό (ή πρώτης κατηγορίας Baire) αν είναι ίσο με μία αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων (δηλαδή συνόλων με κενό εσωτερικό) ή, ισοδύναμα, αν το συμπληρωματικό του είναι μία αριθμήσιμη τομή πυκνών ανοιχτών συνόλων. Εδώ θα δείξουμε το ζητούμενο, δείχνοντας τον δεύτερο, αυτό, ισοδύναμο ορισμό. Θέτουμε $u = \hat{v}_* = v_*$ και θεωρούμε τα σύνολα

$$C_n := \{x : u^*(x) - u(x) < 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η u^* είναι $\alpha.\eta.\sigma.$ και $-u = -v_* = (-v)^*$, σύμφωνα με το $ii)$ της Παρατήρησης 3. Άρα και η $-u$ είναι $\alpha.\eta.\sigma.$, οπότε η $u^* - u$ είναι $\alpha.\eta.\sigma.$ συνάρτηση. Επομένως, τα σύνολα C_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανοιχτά (αν δεν είναι ανοιχτό ένα σύνολο της μορφής $\{x : g(x) < \alpha\}$, τότε η g παρουσιάζει, τουλάχιστον, πήδημα προς τα πάνω, δηλαδή δεν είναι $\alpha.\eta.\sigma.$). Προφανώς, η u είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν $x \in C_n$ για όλα τα n. Θα αποδείξουμε ότι κάθε C_n είναι πυκνό. Έχουμε $u^* \geq u$ και από την κάτω ημισυνέχεια της u, παίρνουμε ότι

$$(u^*)_* \geq u_* = u. \tag{30}$$

Επίσης, είναι

$$u = \hat{v}_* \leq \hat{v} \Rightarrow u^* \leq \hat{v}^* = \hat{v}$$

και παίρνοντας τον *κ.η.σ.* φάκελο και στα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας, έχουμε,

$$(u^*)_* \leq \hat{v}_* = u. \tag{31}$$

Από τις σχέσεις (30) και (31) προκύπτει ότι

$$(u^*)_* = u. \tag{32}$$

Έστω ότι κάποιο C_{n_0}, $n_0 \in \mathbb{N}$, δεν είναι πυκνό. Τότε, για κάποιο x_0, θα είχαμε ότι

$$u^*(x) \geq u(x) + \frac{1}{n_0},$$

για όλα τα x κοντά στο x_0. Έτσι, με χρήση του ότι η u είναι *κ.η.σ.*, παίρνουμε ότι

$$(u^*)_*(x_0) \geq u_*(x_0) + \frac{1}{n_0} = u(x_0) + \frac{1}{n_0},$$

κάτι που αποτελεί άτοπο, λόγω της σχέσης (32). Επομένως, τα C_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι πυκνά, ανοιχτά και το σύνολο των σημείων συνέχειας της u είναι ίσο με την τόμη όλων των C_n. Άρα, το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της u είναι ισχνό. Επίσης, από το Θεώρημα του Baire έχουμε ότι η αριθμήσιμη τομή ανοιχτών και πυκνών συνόλων σε ένα πλήρη μετρικό χώρο είναι πυκνό σύνολο, άρα το σύνολο των σημείων συνέχειας της u είναι πυκνό. □

Παρατήρηση 8 *Μία πλήρης λύση είναι μοναδική αν και μόνο αν είναι συνεχής, γιατί διαφορετικά υπάρχουν απείρως πολλές συναρτήσεις με τους ίδιους ημισυνεχείς φακέλους.*

Θα δώσουμε, τώρα, την απόδειξη του Θεωρήματος 2, η οποία είναι απλή συνέπεια των παρακάτω δύο προτάσεων.

Πρόταση 3 *Η συνάρτηση αξίας $\hat{v}$ είναι η μέγιστη υπολύση του (24).*

Απόδειξη: Η περίπτωση κατά την οποία έχουμε ότι $int(T) = \emptyset$ μας οδηγεί εύκολα στο ζητούμενο, καθώς τότε ισχύει ότι $\{t : y_x(t,\alpha) \in int(T)\} = \emptyset$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ και $\alpha \in A$. Άρα, $\hat{t}_x(\alpha) = +\infty$, οπότε

$$\hat{v}(x) = \inf_{\alpha \in A} \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = 1,$$

για κάθε $x \in \bar{\Omega}$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\hat{v}_* = \hat{v}^* = \hat{v} = 1.$$

Η $\hat{v}$ είναι λύση του (24), άρα η $\hat{v}^*$ είναι υπολύση αυτού και, λόγω της παραπάνω σχέσης, έχουμε ότι η $\hat{v}$ είναι υπολύση του (24). Επίσης, η v_*, πέρα από ελάχιστη υπερλύση αυτού, όπως αναφέρθηκε στην απόδειξη του iii) του Πορίσματος 3, είναι και η μέγιστη υπολύση του, κάτι που επίσης προκύπτει από το ίδιο Θεώρημα (βλέπε [1], σελ.313 -Θεώρημα 3.7 και σελ.310 -Πρόταση 3.3). Επίσης, προφανώς ισχύει ότι $v \leq \hat{v}$, άρα έχουμε :

$$v_* \leq v^* \leq \hat{v}^* = \hat{v} \Rightarrow v_* \leq \hat{v}.$$

Αφού η $\hat{v}$ είναι υπολύση του (24), αναγκαστικά θα έχουμε ότι $\hat{v} = v_*$, δηλαδή πράγματι η $\hat{v}$ είναι η μέγιστη υπολύση αυτού. Υποθέτουμε, επομένως, ότι $int(T) \neq \emptyset$. Έστω w μία υπολύση του (24) και αρχικά παρατηρούμε ότι δεν είναι περιοριστικό το να υποθέσουμε ότι $w \geq 0$. Πραγματικά, αν δεν ισχύει αυτό, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την w από την $w^+ = \max\{w, 0\}$. Οι w και 0 είναι $\alpha.\eta.\sigma.$, οπότε και η w^+ είναι $\alpha.\eta.\sigma.$. Επίσης, οι w και 0 είναι υπολύσεις, άρα και οι $w^*, 0^*$ είναι υπολύσεις (αφού $w, 0$ $\alpha.\eta.\sigma.$ συναρτήσεις). Οπότε, από Πρόταση (βλέπε [1], σελ.320, Πρόταση 4.6), η $(\max\{w, 0\})^*$ θα είναι υπολύση, άρα, αφού w^+ $\alpha.\eta.\sigma.$, η w^+ είναι υπολύση ιξώδους του (24).

Ορίζουμε για $h > 0$

$$T_h := \{x \in T : dist(x, \partial T) \geq h\} \quad \text{και} \quad v^h(x) := \inf_{\alpha \in A} \int_0^{t_x^h(\alpha)} e^{-s} ds,$$

όπου t_x^h είναι ο πρώτος χρόνος εισόδου του συστήματος στο T_h. Από Θεώρημα (βλέπε [1], σελ.298, Θεώρημα 2.6), η $(v^h)_*$ είναι μία υπερλύση του Dirichlet προβλήματος

$$\begin{cases} u + H(x, Du) = 0 & \text{στο } \mathbb{R}^N \setminus T_h, \\ u = 0 & \text{στο } \partial T_h. \end{cases} \tag{33}$$

Επεκτείνουμε την w στο $int(T)$ θέτοντας $w \equiv 0$ και τότε η $w \in USC(\mathbb{R}^N)$. Αυτό γιατί, $w \in BUSC(\bar{\Omega})$ ως υπολύση του (24), ενώ έχουμε ότι $w \geq 0$. Κάνουμε, τώρα, δύο ισχυρισμούς, τους οποίους θα αποδείξουμε αργότερα. Ισχυριζόμαστε, λοιπόν, ότι η w είναι μία υπολύση του (33) και ότι

$$\hat{v}(x) = \inf_{h>0} v^h(x), \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}^N. \tag{34}$$

Τότε, από την κλασική αρχή σύγκρισης (βλέπε [2]), παίρνουμε ότι $w \leq (v^h)_*$ στο $\mathbb{R}^N$, για όλα τα $h > 0$. Δηλαδή, $w \leq v^h$ για κάθε $h > 0$, οπότε $w \leq \hat{v}$. Αφού η $\hat{v}^*$ είναι υπολύση του (24) (καθότι η $\hat{v}$ είναι λύση του (24), όπως ήδη έχει ειπωθεί) και $w \leq \hat{v}$ για την τυχαία υπολύση w αυτού, έχουμε, θέτοντας όπου w τη $\hat{v}^*$, ότι $\hat{v}^* \leq \hat{v}$, δηλαδή $\hat{v} = \hat{v}^*$, άρα και η $\hat{v}$ είναι υπολύση του (24) και, αφού $w \leq \hat{v}$ για κάθε υπολύση w αυτού, προκύπτει ότι η $\hat{v}$ είναι η μέγιστη υπολύση του (24).

Για να αποδείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό, αρχικά παρατηρούμε ότι η w είναι, προφανώς, μία υπολύση της συνοριακής συνθήκης του (33) (αφού $w \equiv 0$ στο $int(T)$) και της HJB εξίσωσης, στο T^c (αφού είναι υπολύση της HJB του (24)) και στο $int(T) \setminus T_h$ (αφού στο $int(T) \setminus T_h$ είναι $w \equiv 0$ και, αν $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus T_h)$ και $y \in int(T) \setminus T_h$ σημείο τοπικού μεγίστου της $w - \phi = -\phi$, τότε $w(y) + H(y, D\phi(y)) = \sup_{\alpha \in A} \{-f(y, \alpha) D\phi(y)\} - 1 = -1 < 0$). Μένει να το δείξουμε για το ∂T. Έστω, λοιπόν, $x_0 \in \partial T$ ένα σημείο τοπικού μεγίστου της $w - \phi$, με $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus T_h)$. Υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις. Η πρώτη είναι όταν $w(x_0) > 0$. Τότε, ως υπολύση του (24), η w ικανοποιεί, υπό την έννοια του ιξώδους, τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη στο ∂T, άρα

$$\min\Big(w(x_0), w(x_0) + H(x_0, D\phi(x_0))\Big) \leq 0.$$

Επομένως,

$$w(x_0) + H(x_0, D\phi(x_0)) \leq 0. \tag{35}$$

Άρα, η w είναι υπολύση ιξώδους του (33) και στο ∂T. Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν $w(x_0) = 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi(x_0) = w(x_0) = 0$ άρα, αφού στο x_0 η $w - \phi$ έχει τοπικό μέγιστο και $(w - \phi)(x_0) = 0$, για τα x κοντά στο x_0 θα έχουμε $(w - \phi)(x) \leq 0$, δηλαδή $\phi(x) \geq w(x) \geq 0$. Οπότε, η ϕ έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0, άρα $D\phi(x_0) = 0$ και, προφανώς, η (35) ικανοποιείται.

Μένει να αποδειχτεί η σχέση (34). Εξ' ορισμού έχουμε ότι $\hat{v} \leq v^h$ για κάθε $h > 0$ (καθότι $T_h \subset int(T)$ για κάθε $h > 0$). Άρα, $\inf_{h>0} v^h(x) \geq \hat{v}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\inf_{h>0} v^h(x) \leq \hat{v}$. Υποθέτουμε, για άτοπο, ότι υπάρχει κάποιο $\bar{x}$, τέτοιο ώστε $\hat{v}(\bar{x}) < \inf_{h>0} v^h(\bar{x})$. Έχουμε τότε ότι υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $\hat{v}(\bar{x}) < q < \inf_{h>0} v^h(\bar{x})$. Τώρα, αν θέσουμε $\epsilon = \frac{q - \hat{v}(\bar{x})}{2} > 0$, έχουμε ότι

$$\hat{v}(\bar{x}) + 2\epsilon = \hat{v}(\bar{x}) + 2\frac{q - \hat{v}(\bar{x})}{2} = q < \inf_{h>0} v^h(\bar{x}) \leq v^h(\bar{x}),$$

για όλα τα $h > 0$. Δηλαδή, υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\hat{v}(\bar{x}) + 2\epsilon < v^h(\bar{x}), \quad \text{για κάθε } h > 0. \tag{36}$$

Ειδικότερα, $\hat{v}(\bar{x}) + 2\epsilon < 1$, αφού $v^h(\bar{x}) \leq \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = 1$, για κάθε $h > 0$. Είναι $\hat{v}(\bar{x}) = \inf_{\alpha \in A} \int_0^{\hat{t}_{\bar{x}}(\alpha)} e^{-s} ds$, άρα υπάρχει $\bar{\alpha} \in A$ ώστε

$$\int_0^{\hat{t}_{\bar{x}}(\bar{\alpha})} e^{-s} ds \leq \hat{v}(\bar{x}) + \epsilon,$$

δηλαδή

$$1 - e^{-\hat{t}_{\bar{x}}(\bar{\alpha})} \leq \hat{v}(\bar{x}) + \epsilon. \tag{37}$$

Επιπλέον, είναι $\hat{t}_{\bar{x}}(\bar{\alpha}) = \inf\{t \geq 0 : y_{\bar{x}}(t, \bar{\alpha}) \in int(T)\}$, άρα

$$1 - e^{-\hat{t}_{\bar{x}}(\bar{\alpha})} = \inf\left\{1 - e^{-t} : y_{\bar{x}}(t, \bar{\alpha}) \in int(T)\right\},$$

αφού η $1 - e^{-t}$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς t. Άρα, υπάρχει $\tilde{t} \geq 0$ ώστε $z := y_{\bar{x}}(\tilde{t}, \bar{\alpha}) \in int(T)$ και

$$1 - e^{-\tilde{t}} \leq 1 - e^{-\hat{t}_{\bar{x}}(\bar{\alpha})} + \epsilon. \tag{38}$$

Παίρνοντας $h \leq dist(z, \partial T)$ έχουμε ότι $z \in T_h$, οπότε

$$t^h_{\bar{x}}(\bar{\alpha}) = \inf\{t \geq 0 : y_{\bar{x}}(t, \bar{\alpha}) \in T_h\} \leq \tilde{t},$$

άρα

$$\begin{aligned} v^h(\bar{x}) &= \inf_{\alpha \in A} \int_0^{t^h_{\bar{x}}(\alpha)} e^{-s} ds \leq \int_0^{t^h_{\bar{x}}(\bar{\alpha})} e^{-s} ds \\ &\leq \int_0^{\tilde{t}} e^{-s} ds = 1 - e^{-\tilde{t}} \\ &\Rightarrow \ v^h(\bar{x}) \leq 1 - e^{-\tilde{t}}. \end{aligned}$$

Από την τελευταία, με χρήση των (38) και (37) διαδοχικά, προκύπτει ότι

$$v^h(\bar{x}) \leq \hat{v}(\bar{x}) + 2\epsilon.$$

Αυτό όμως αποτελεί άτοπο λόγω της (36) και έτσι δείξαμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 4 *Αν το T είναι ίσο με τη θήκη του εσωτερικού του, τότε*

$$\hat{v}_*(x) = v_*(x), \quad \textit{για όλα τα } x \in \mathbb{R}^N.$$

Απόδειξη : Εξ' ορισμού έχουμε ότι ισχύει $v \leq \hat{v}$, άρα $v_* \leq \hat{v}_*$. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{v}_* \leq v$, το οποίο δίνει άμεσα αυτό που θέλουμε, αφού τότε $(\hat{v}_*)_* \leq v_*$, οπότε $\hat{v}_* \leq v_*$, άρα $\hat{v}_* = v_*$. Έστω $x \in \mathbb{R}^N$ και επιλέγουμε τυχαίο $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $t_x(\alpha) < +\infty$ (αν ένα τέτοιο α δεν υπάρχει, τότε $t_x(\alpha) = +\infty$ $\forall \alpha \in A$, άρα $v(x) = \inf_{\alpha \in A} \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = 1$ και η ζητούμενη ανισότητα ισχύει, αφού $\hat{v}_* \leq \hat{v} \leq \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = 1$). Θέτουμε $\tau := t_x(\alpha)$, $\bar{x} := y_x(\tau, \alpha) \in T$ και, αφού $T = \overline{int(T)}$, υπάρχει ακολουθία $\bar{x}_n \in int(T)$ τέτοια ώστε $\bar{x}_n \to \bar{x}$. Έστω $z_n(\cdot)$ η λύση του

$$\begin{cases} z' = f(z, \alpha) & 0 \leq t < \tau, \\ z(\tau) = \bar{x}_n. \end{cases}$$

Τότε, για όλα τα t, με $0 \leq t \leq \tau$, έχουμε :

$$\begin{aligned} |z_n(t) - y_x(t, \alpha)| &= |z_n(t) - z_n(\tau) + z_n(\tau) - y_x(\tau, \alpha) + y_x(\tau, \alpha) - y_x(t, \alpha)| \\ &= \Big| \int_0^t f(z_n(s), \alpha(s)) ds - \int_0^\tau f(z_n(s), \alpha(s)) ds + z_n(\tau) - \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -y_x(\tau,\alpha) + \int_0^\tau f(y_x(s,\alpha),\alpha(s))ds - \int_0^t f(y_x(s,\alpha),\alpha(s))ds\Bigg| \\
= & \left|\int_\tau^t f(z_n(s),\alpha(s))ds + z_n(\tau) - y_x(\tau,\alpha) + \int_t^\tau f(y_x(s,\alpha),\alpha(s))ds\right| \\
= & \left|z_n(\tau) - y_x(\tau,\alpha) + \int_t^\tau f(y_x(s,\alpha),\alpha(s))ds - \int_t^\tau f(z_n(s),\alpha(s))ds\right| \\
= & \left|z_n(\tau) - y_x(\tau,\alpha) + \int_t^\tau \left[f(y_x(s,\alpha),\alpha(s)) - f(z_n(s),\alpha(s))\right]ds\right| \\
\leq & \left|z_n(\tau) - y_x(\tau,\alpha)\right| + \left|\int_t^\tau \left[f(y_x(s,\alpha),\alpha(s)) - f(z_n(s),\alpha(s))\right]ds\right| \\
\leq & \left|\bar{x}_n - \bar{x}\right| + \int_t^\tau \left|f(y_x(s,\alpha),\alpha(s)) - f(z_n(s),\alpha(s))\right|ds \\
\leq & \left|\bar{x}_n - \bar{x}\right| + \int_t^\tau L\left|y_x(s,\alpha) - z_n(s)\right|ds \\
= & \left|\bar{x}_n - \bar{x}\right| + \int_t^\tau L\left|z_n(s) - y_x(s,\alpha)\right|ds,
\end{aligned}
$$

όπου L η σταθερά Lipschitz της συνάρτησης f, η οποία είναι Lipschitz-συνεχής ως προς τις μεταβλητές της κατάστασης. Δηλαδή,

$$
|z_n(t) - y_x(t,\alpha)| \leq |\bar{x}_n - \bar{x}| + \int_t^\tau L\,|z_n(s) - y_x(s,\alpha)|\,ds,
$$

για όλα τα t, με $0 \leq t \leq \tau$. Από την τελευταία σχέση, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Gronwall (βλέπε για αυτήν το [1]), προκύπτει ότι

$$
|z_n(t) - y_x(t,\alpha)| \leq |\bar{x}_n - \bar{x}|e^{L(\tau-t)}.
$$

Θέτοντας $t = 0$ σε αυτήν την ανισότητα, παίρνουμε ότι η ακολουθία $x_n := z_n(0)$ συγκλίνει στο x, όπως $n \to +\infty$. Επιπλέον, $\hat{t}_{x_n}(\alpha) \leq \tau = t_x(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (γιατί για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $y_{z_n(0)}(t,\alpha) = z_n(t)$, για $0 \leq t \leq \tau$, αφού οι δύο συναρτήσεις ορίζονται ως λύσεις του ίδιου συστήματος στο $[0,\tau)$ και είναι συνεχείς στο τ, άρα $\hat{t}_{x_n}(\alpha) = \inf\left\{t \geq 0 : y_{z_n(0)}(t,\alpha) \in int(T)\right\} \leq \tau$, μιας και $y_{z_n(0)}(\tau,\alpha) = z_n(\tau) = \bar{x}_n \in int(T)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$), άρα έχουμε :

$$
\begin{aligned}
\hat{v}_*(x) &= \liminf_{y\to x} \hat{v}(y) \leq \liminf_{y\to x} \int_0^{\hat{t}_y(\alpha)} e^{-s}ds \\
&= \liminf_{y\to x}\left(1 - e^{-\hat{t}_y(\alpha)}\right) \leq \liminf_{n\to+\infty}\left(1 - e^{-\hat{t}_{x_n}(\alpha)}\right) \\
&\leq 1 - e^{-t_x(\alpha)} \\
&\Rightarrow \hat{v}_*(x) \leq 1 - e^{-t_x(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Το α επιλέχθηκε τυχαία, άρα

$$
\hat{v}_*(x) \leq \inf_{\alpha\in A}\left\{1 - e^{-t_x(\alpha)}\right\} = \inf_{\alpha\in A}\int_0^{t_x(\alpha)} e^{-s}ds = v(x) \ \Rightarrow
$$

$$\Rightarrow \quad \hat{v}_*(x) \leq v(x)$$

και έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2 : Η πρώτη πρόταση του Θεωρήματος είναι ακριβώς η Πρόταση 3. Για να δείξουμε ότι η $\hat{v}$ είναι μία πλήρης λύση, απομένει να αποδειχτεί ότι η $\hat{v}_*$ είναι η ελάχιστη υπερλύση του (24) (αφού η $\hat{v}^* = \hat{v}$ είναι η μέγιστη υπολύση του (24)). Αλλά η v_* είναι η ελάχιστη υπερλύση αυτού, όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της απόδειξης της Πρότασης 3, οπότε, από την Πρόταση 4, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. □

4 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για Hamilton-Jacobi Εξισώσεις με ασυνεχή Χαμιλτονιανή

4.1 Εισαγωγή

Θα μελετήσουμε εξισώσεις Hamilton-Jacobi της μορφής

$$\lambda u(x) + \sup_{\alpha \in B}\{-f(x,\alpha)\cdot Du(x) - h(x,\alpha)\} = g(x), \tag{39}$$

όπου η g είναι μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Θα μελετήσουμε την (39) σε όλο το $\mathbb{R}^N$, όπως και συνοριακά προβλήματα Dirichlet σε ανοιχτά χωρία (βλέπε [11]). Εξισώσεις της μορφής (39) με ασυνεχή συντελεστή g συναντώνται συχνά σε εφαρμογές.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των λύσεων ιξώδους για να ορίσουμε λύσεις της (39). Με αυτήν την έννοια της λύσης, όταν μία εξίσωση έχει έναν ασυνεχή συντελεστή, δεν μπορούμε να τον θεωρήσουμε σημειακά. Πράγματι, για εξίσωσεις Bellman βέλτιστου ελέγχου, όπως η (39), μία φυσική υποψήφια λύση είναι η συνάρτηση αξίας του αντίστοιχου προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. Μπορούμε να διακρίνουμε εύκολα ότι, ακόμα και όταν η g έχει καλές ασυνέχειες, αν αυτή θεωρηθεί σημειακά οι συναρτήσεις αξίας δεν θα ικανοποιούν πάντα την εξίσωση, υπό την έννοια του ιξώδους, και η ύπαρξη λύσεων, υπό αυτήν την έννοια, ανάγεται σε πρόβλημα. Έτσι, ορίζουμε υπερ- και υπολύσεις ιξώδους παίρνοντας τους κάτω και άνω ημισυνεχείς φακέλους της g. Σε αυτήν την περίπτωση, η καθορισμένη μέθοδος της αρχής δυναμικού προγραμματισμού εφαρμόζεται, για να δείξει ότι οι συναρτήσεις αξίας πράγματι επιλύουν την αντίστοιχη εξίσωση Bellman. Το βασικό μειονέκτημα αυτής της έννοιας της λύσης είναι το ότι εξισώσεις με διαφορετικά g γίνονται ισοδύναμες από την πλευρά του ορισμού της λύσης. Έτσι, το βασικό θέμα είναι η μοναδικότητα. Αυτή αποτυγχάνει σε πολλά παραδείγματα, άσχετα αν μεταφράσουμε τις λύσεις με την σχεδόν παντού έννοια ή με την έννοια του ιξώδους. Γενικά, το ερώτημα της μοναδικότητας προκύπτει ότι σχετίζεται με τη συμβατότητα του διανυσματικού πεδίου f, με το αντίστοιχο στην (39) πρόβλημα ελέγχου, καθώς και με το σύνολο των ασυνεχειών της g. Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για μοναδικότητα λύσεων της (39), οι οποίες είτε ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}^N$, ή σε ένα ανοιχτό υποσύνολο μαζί με συμβατές συνοριακές συνθήκες, είναι η ύπαρξη μιας βέλτιστης τροχιάς του προβλήματος ελέγχου σε κάθε σημείο του χωρίου, της οποίας το σύνολο των χρόνων που περνάει στο σύνολο ασυνέχειας της g, έχει μέτρο μηδέν.

4.2 Λύσεις ιξώδους

Αναφέρουμε το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, που αντιστοιχεί στην εξίσωση (39). Θεωρούμε το ακόλουθο δυναμικό σύστημα

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), \alpha(t)) \\ y(0) = x, \end{cases} \tag{40}$$

όπου $f : \mathbb{R}^N \times B \to \mathbb{R}^N$ συνεχής συνάρτηση και B ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου. Οι συναρτήσεις ελέγχου που εμφανίζονται στην (40) επιλέγονται στο A, το οποίο είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων $\alpha(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to B$. Για τεχνικούς λόγους, σε κάποιες προτάσεις θα διαλέξουμε ως B το σύνολο των Radon μέτρων πιθανότητας σε ένα συμπαγές υποσύνολο ενός Ευκλείδιου χώρου, δηλαδή το σύνολο των καλούμενων χαλαρών ελέγχων. Σε αυτήν την περίπτωση, το $A = L^\infty(0, +\infty; B)$ είναι συμπαγές, ως προς την ασθενή* τοπολογία. Τα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου για το σύστημα (40) ορίζονται, ως προς μία συνεχή συνάρτηση τρέχοντος κόστους $h : \mathbb{R}^N \times B \to \mathbb{R}$ και το συναρτησιακό

$$J(t, x, a) = \int_0^t e^{-\lambda s} h(y_x(s), \alpha(s)) ds.$$

Υποθέτουμε ότι, για κάθε $R > 0$, οι f, h ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{array}{ll} |f(x,\alpha) - f(y,\alpha)| \le L|x-y|, & x, y \in \mathbb{R}^N,\ \alpha \in A \\ |h(x,\alpha) - h(y,\alpha)| \le L_R|x-y|, & |x|, |y| \le R,\ \alpha \in A, \end{array} \tag{41}$$

όπου L, L_R θετικές σταθερές. Προκύπτει ότι, για δεδομένο $\alpha \in A$ και $x \in \mathbb{R}^N$, υπάρχει μοναδική γενική λύση του (40), την οποία θα συμβολίζουμε $y_x(t;\alpha) \equiv y(\cdot)$.

Συμβολίζουμε τη Χαμιλτονιανή

$$H(x, p) := \sup_{\alpha \in B} \left\{ -f(x, \alpha) \cdot p - h(x, \alpha) \right\}.$$

Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και θεωρούμε την Hamilton-Jacobi εξίσωση

$$\lambda u(x) + H(x, Du(x)) = g(x), \quad x \in \Omega. \tag{42}$$

Έχουμε ότι $\lambda \ge 0$ και $g : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ είναι Borel μετρήσιμη, πιθανώς ασυνεχής και επεκτεταμένη με πραγματικές τιμές. Θα χρειαστούμε τις έννοιες των άνω και κάτω ημισυνεχών φακέλων μίας συνάρτησης $v : D \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, τις οποίες ήδη έχουμε δει. Αυτές είναι, αντίστοιχα,

$$v^*(x) = \lim_{r\to 0^+} \sup_{\substack{|y-x|\le r\\ y\in D}} v(y) \ , \quad v_*(x) = \lim_{r\to 0^+} \inf_{\substack{|y-x|\le r\\ y\in D}} v(y).$$

Ορισμός 6 *Μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $U : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (αντίστοιχα άνω ημισυνεχής $V : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) είναι μία υπερλύση ιξώδους (αντίστοιχα υπολύση) της (42) αν για όλες τις $\phi \in C^1(\Omega)$ και για $x \in dom(U)$ ένα σημείο τοπικού ελαχίστου της $(U - \phi)$ (αντίστοιχα για $x \in dom(V)$ ένα σημείο τοπικού μεγίστου της $(V - \phi)$), έχουμε*

$$\lambda U(x) + H(x, D\phi(x)) \ge g_*(x), \quad (\textit{αντίστοιχα } \lambda V(x) + H(x, D\phi(x)) \le g^*(x)).$$

Μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $U : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ είναι κάτω ημισυνεχής (κ.η.σ.) υπολύση της (42) αν είναι υπερλύση ιξώδους της

$$-\lambda U(x) - H(x, DU(x)) \ge -g^*(x), \ \ \textit{στο}\ \Omega.$$

Μία τοπικά φραγμένη συνάρτηση U είναι μία (καθιερωμένη) λύση ιξώδους της (42) αν η U_* είναι υπερλύση και η U^* είναι υπολύση. Μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση U είναι κ.η.σ. λύση αν είναι υπερλύση ιξώδους και κ.η.σ. υπολύση της (42).

Η έννοια της *κ.η.σ.* λύσης παρουσιάστηκε από τους Barron-Jensen και είναι διαφορετική από την κλασική λύση ιξώδους των Crandall-Lions, όταν εφαρμόζεται σε ασυνεχείς λύσεις (βλέπε [1], σελ.342). Είναι, όμως, σημαντική έννοια σε προβλήματα συνοριακών τιμών, ώστε να χαρακτηρίσει μία μοναδική λύση χωρίς τοπικές υποθέσεις ελεγξιμότητας στην f στο σύνορο, ακόμα και όταν η g είναι συνεχής. Στον προηγούμενο ορισμό, ο ασυνεχής όρος g δεν θεωρείται σημειακά. Αυτό γιατί, στις εξισώσεις της μορφής (39), οι οποίες έχουν κάποια εφαρμογή στη θεωρία ελέγχου και στον λογισμό μεταβολών, ένα βασικό γεγονός που έχουμε να αντιμετωπίσουμε όταν ορίζουμε λύσεις ιξώδους είναι το ότι οι συναρτήσεις αξίας του αντίστοιχου προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, θα πρέπει να επιλύουν την εξίσωση. Με αυτήν την έννοια της λύσης και με τις υποθέσεις που περιγράφτηκαν προηγουμένως, μπορεί να δειχθεί ότι πραγματικά συμβαίνει αυτό. Επίσης, το να χειριστούμε την g σημειακά δεν δίνει ένα καλό και με νόημα αντικείμενο λύσης και αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι, ακόμα και για μία συνάρτηση g με ένα πολύ απλό σύνολο ασυνεχειών, θα αντιμετωπίσουμε όλες τις βασικές δυσκολίες του προβλήματος που θα δούμε αργότερα, όσον αφορά την έλλειψη μοναδικότητας.

Παράδειγμα 2 Μελετάμε την επιλυσιμότητα της απλής εξίσωσης

$$u + |u'| = g(x). \tag{43}$$

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση όπου $g(x) = 1$ για $x > 0$ και $g(x) = 0$ για $x < 0$. Δεν περιοριζόμαστε σε κάποια συγκεκριμένη τιμή για το $g(0)$ προς το παρόν. Οι λύσεις αναμένονται να είναι συνεχείς. Επίσης, είναι λογικό να αναμένουμε ότι η λύση θα μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^-$. Από τη μέθοδο των χαρακτηριστικών προκύπτει ότι, μία πιθανή επιλογή ειναι η

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Αυτή είναι πράγματι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου που αντιστοιχεί στην εξίσωση (43), αν $g(0) \geq 0$. Θα ελέγξουμε αν η u_0 είναι πράγματι λύση ιξώδους. Δεν υπάρχουν ομαλές συναρτήσεις ϕ, τέτοιες ώστε η $u_0 - \phi$ να έχει στο μηδέν σημείο τοπικού μεγίστου, κάτι που φαίνεται άμεσα από τη γραφική παράσταση της u_0. Αν η $u_0 - \phi$ λαμβάνει ελάχιστο στο 0, τότε $\phi'(0) \in [0, 1]$, όπως προφανώς φαίνεται από τη γραφική παράσταση. Άρα, αν αντιμετωπίσουμε τον συντελεστή g σημειακά, καταλήγουμε στη συνθήκη $g(0) \leq 0$. Επομένως, μόνο μία *κ.η.σ.* g θα ήταν αποδεκτή, αν δεν θεωρήσουμε φακέλους της g ($g(0) \leq 0 \Leftrightarrow g$ δεν έχει πήδημα προς τα κάτω $\Leftrightarrow g$ *κ.η.σ.*) και πιθανόν αντιμετωπίζουμε πρόβλημα ύπαρξης όταν η g δεν είναι *κ.η.σ.* Ας υποθέσουμε τώρα ότι η g είναι πράγματι *κ.η.σ.*. Όπως πριν, μπορεί να δειχθεί ότι, για $c \geq 0$, κάθε συνάρτηση της οικογένειας

$$u_c(x) = \begin{cases} 1 - (1 + c)e^{-x}, & x \geq 0, \\ -ce^{x}, & x < 0, \end{cases}$$

είναι μία Lipschitz συνεχής λύση ιξώδους, δεδομένου ότι $g(0) \leq -c$. Αν $g(0) = 0$, υπάρχει μόνο ένα στοιχείο της οικογένειας που είναι λύση ιξώδους και, πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει μία μοναδική φραγμένη λύση ιξώδους της εξίσωσης (43). Αν, αντίθετα, $g(0) < 0$, τότε βρίσκουμε μία αλληλουχία απείρων λύσεων που ικανοποιούν την εξίσωση *σ.π.* και είναι λύσεις ιξώδους. Άρα, η μοναδικότητα αποτυγχάνει γενικά και πρέπει να αποδεχθούμε το γεγονός ότι η τιμή του ασυνεχούς όρου σε ένα και μόνο σημείο θα επηρεάσει σοβαρά τη μοναδικότητα.

Από την άλλη, ας θεωρήσουμε έναν ασυνεχή όρο, όπως τον $g(x) = 2e^{-x} - 1$, για $x > 0$ και $g(x) = 0$, για $x < 0$. Ξανά, μπορούμε να ελέγξουμε κατ' ευθείαν αν η συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

που είναι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος ελέγχου που αντιστοιχεί στην (43) όταν $g(0) \geq 0$, είναι λύση ιξώδους της εξίσωσης. Αν η $u - \phi$ λαμβάνει μέγιστο στο 0 τότε, αναγκαστικά, $\phi'(0) \in [-1, 0]$. Τότε προκύπτει ότι, όταν η g αντιμετωπιστεί σημειακά, η u είναι λύση ιξώδους αν και μόνο αν $g(0) \geq 1$, οπότε μόνο μία άνω ημισυνεχής συνάρτηση g θα ήταν αποδεκτή σε αυτήν την περίπτωση. Μπορεί να δειχθεί ότι, όποια τιμή και να βάλουμε στο $g(0) \in$

$[0, +\infty)$, η u είναι η μοναδική λύση ιξώδους της (43), όταν ορίσουμε λύσεις ιξώδους όπως στον ορισμό 6.

Συμπεραίνουμε ότι, το να χειριστούμε την g σημειακά, δεν μας δίνει μία καλή γενική έννοια λύσης και οι περιπτώσεις των άνω και κάτω ημισυνεχών g αναμένεται να είναι διαφορετικές, κάτι που είναι εύκολο να δεχθούμε και οφείλεται στην κυρτότητα της Χαμιλτονιανής και στην εναλλακτική μετάφραση της λύσης.

4.3 Αρχές βελτιστότητας

Οι υπολύσεις και υπερλύσεις ιξώδους της (42) μπορούν να χαρακτηριστούν από άμεσους τύπους αναπαράστασης, που χρησιμοποιούν τα δεδομένα της Χαμιλτονιανής κατά μήκος των λύσεων της (40). Καλούμε τέτοιους τύπους αναπαράστασης, αρχές βελτιστότητας. Οι συναρτήσεις αξίας των προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου ικανοποιούν αρχές βελτιστότητας μέσω της γνωστής αρχής δυναμικού προγραμματισμού, αλλά δείχνουμε ότι αυτή η ιδιότητα μπορεί να επεκταθεί σε όλες τις υπερλύσεις και υπολύσεις ιξώδους της (42). Αρχικά ορίζουμε τον χρόνο εξόδου των τροχιών της (40) από το ανοιχτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ορίζουμε, για $\alpha \in A$,

$$\tau_x \equiv \tau_x(\alpha) := \inf\{t \geq 0 |\ y_x(t;\alpha) \notin \Omega\}\ (\leq +\infty).$$

Ορισμός 7 *Λέμε ότι η u ικανοποιεί την άνω αρχή βελτιστότητας στο Ω, ως προς το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου για το σύστημα (40), το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων A και το τρέχον κόστος $h + g$ αν*

$$u(x) = \inf_{\alpha \in A} \sup_{t \in [0,\tau_x)} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda s}[h(y_x(s), \alpha(s)) + g_*(y_x(s))]ds + e^{-\lambda t} u(y_x(t)) \right\},$$

για όλα τα $x \in \Omega$.

Λέμε ότι η u ικανοποιεί την κάτω αρχή βελτιστότητας στο Ω, αν

$$u(x) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{t \in [0,\tau_x)} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda s}[h(y_x(s), \alpha(s)) + g^*(y_x(s))]ds + e^{-\lambda t} u(y_x(t)) \right\},$$

για όλα τα $x \in \Omega$.

Έχουμε την ακόλουθη Πρόταση (για απόδειξη αυτής, βλέπε [11]) :

Πρόταση 5 *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (41).*

(1) Έστω $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ φραγμένη από κάτω και έστω U μία κάτω ημισυνεχής υπερλύση ιξώδους της (42), φραγμένη από κάτω. Αν A είναι το σύνολο των χαλαρών ελέγχων, τότε η U ικανοποιεί την άνω αρχή βελτιστότητας στο Ω.

(2) Έστω $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ τοπικά φραγμένη από πάνω. Έστω U, είτε μία άνω ημισυνεχής υπολύση ιξώδους, είτε μία κ.η.σ. υπολύση της (42). Τότε η U ικανοποιεί την κάτω αρχή βελτιστότητας στο Ω.

4.4 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για μοναδικότητα

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \lambda u(x) + H(x, Du(x)) = g(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = \psi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{44}$$

όπου πιθανόν $\Omega = \mathbb{R}^N$. Φυσικά αν $\Omega = \mathbb{R}^N$ η συνοριακή συνθήκη παύει να υπάρχει, αλλιώς η συνοριακή τιμή είναι πάντα συμβατή ως προς τα δεδομένα του (44). Αυτό σημαίνει ότι η συνοριακή συνθήκη επιτυγχάνεται, περιορίζοντας στο $\partial\Omega$ μία συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κάτω ημισυνεχής και ικανοποιεί την

$$\psi(x) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\lambda s} \left(h(y(s), \alpha(s)) + g^*(y(s)) \right) ds + e^{-\lambda t} \psi(y(t; \alpha)),$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$. Ισοδύναμα, από την προς τα πίσω αρχή δυναμικού προγραμματισμού και την αρχή υποβελτιστότητας (βλέπε [1]), η ψ είναι υπερλύση ιξώδους της

$$-\lambda u(x) - H(x, Du(x)) \geq -g^*(x), \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^N$ η έννοια της υπερλύσης και υπολύσης ιξώδους του (44) είναι, φυσικά, όπως στον ορισμό 6. Αλλιώς, ορίζουμε στη συνέχεια τι είναι οι υπερλύσεις και υπολύσεις του συνοριακού προβλήματος (44) ως προς το συμβατό συνοριακό δεδομένο ψ. Δίνουμε, ξανά, δύο ορισμούς λύσεων, σύμφωνα με το πώς η συνοριακή συνθήκη επιτυγχάνεται, σημειακά ή με γενικευμένη έννοια.

Ορισμός 8 *Μία υπερλύση του (44) είναι μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ η οποία είναι υπερλύση ιξώδους της μ.δ.ε. του (44) και τέτοια ώστε $u \geq \psi$ στο $\partial\Omega$. Οι υπολύσεις είναι άνω ημισυνεχείς συναρτήσεις και ορίζονται αντίστοιχα.*

Μία κ.η.σ. υπολύση του (44) είναι μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ η οποία είναι υπερλύση ιξώδους της

$$-\lambda u(x) - H(x, Du(x)) \geq -g^*(x), \;\; x \in \mathbb{R}^N$$

και τέτοια ώστε $u = \psi$ στο $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Μία (καθιερωμένη) λύση ιξώδους του (44) είναι μία συνάρτηση $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ που είναι λύση ιξώδους της μ.δ.ε. του (44) και λαμβάνει συνεχώς την συνοριακή συνθήκη Dirichlet.

Μία κ.η.σ. λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (44) είναι μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, που, είτε είναι υπερλύση, είτε κ.η.σ. υπολύση του (44).

Δεν πρέπει να μπερδεύει το γεγονός κατά το οποίο δίνουμε δύο ορισμούς λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών. Γενικά μία λύση μπορεί να μην υπάρχει, ακόμα και υπό την έννοια του ιξώδους, αν απαιτούμε η συνοριακή συνθήκη να λαμβάνεται σημειακά. Για συνεχείς λύσεις που λαμβάνουν τη συνοριακή συνθήκη και συνεχείς Χαμιλτονιανές, οι δύο ορισμοί ταυτίζονται. Ο παραπάνω ορισμός της *κ.η.σ.* λύσης ενός προβλήματος συνοριακών τιμών είναι σημαντικός, ώστε να χαρακτηριστεί η λύση ιξώδους του προβλήματος συνοριακών τιμών με μοναδικό τρόπο, όταν η g είναι συνεχής και επιτρέπουμε ασυνεχείς λύσεις.

Θα μελετήσουμε παρακάτω την ύπαρξη μέγιστων υπολύσεων και ελάχιστων υπερλύσεων του (44). Παρουσιάζουμε τις δύο ακόλουθες συναρτήσεις αξίας των προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου, που αντιστοιχούν στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (44). Είναι, αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} V_m(x) &= \inf_{\alpha\in A}\int_0^{\tau_x(\alpha)} e^{-\lambda t}\left(h(y_x(t),\alpha(t)) + g_*(y(t))\right)dt \\ &\quad + \chi_{\{t|t<+\infty\}}(\tau_x(\alpha))e^{-\lambda\tau_x(\alpha)}\psi\left(y_x(\tau_x(\alpha))\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_M(x) &= \inf_{\alpha\in A}\int_0^{\tau_x(\alpha)} e^{-\lambda t}\left(h(y_x(t),\alpha(t)) + g^*(y(t))\right)dt \\ &\quad + \chi_{\{t|t<+\infty\}}(\tau_x(\alpha))e^{-\lambda\tau_x(\alpha)}\psi\left(y_x(\tau_x(\alpha))\right). \end{aligned}$$

Για να έχει σημασία ο ορισμός της συνάρτησης αξίας, θα υποθέσουμε παρακάτω ότι τα δεδομένα g, h, ψ είναι τουλάχιστον φραγμένα από κάτω και επίσης ότι οι g, h, ψ είναι μη αρνητικές, αν $\lambda = 0$. Οπότε, οι V_m, V_M είναι φραγμένες από κάτω ή μη αρνητικές, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις αξίας V_m, V_M θα επεκταθούν με πραγματικές τιμές, γενικά, παίρνοντας πιθανόν την τιμή $+\infty$. Παρατηρούμε ότι, όταν $\lambda > 0$, οι δύο συναρτήσεις αξίας είναι φραγμένες αν τα δεδομένα g, h, ψ είναι φραγμένα. Επίσης, ισχύει προφανώς ότι $V_m(x) \le V_M(x)$ για $x \in \Omega$. Μπορεί να αποδειχτεί ότι οι $(V_m)_*$ και $(V_M)_*$ είναι *κ.η.σ.* λύσεις του (44) και επίσης ότι οι V_m και V_M είναι (καθιερωμένες) λύσεις ιξώδους, αν είναι τοπικά φραγμένες και συνεχείς στο $\partial\Omega$.

Έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα ασθενής σύγκρισης, το οποίο είναι συνέπεια των αρχών βελτιστότητας.

Πρόταση 6 *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (41).*

(1) Έστω A το σύνολο των χαλαρών ελέγχων. Υποθέτουμε ότι η g είναι φραγμένη από κάτω και έστω $U : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ μία υπερλύση ιξώδους του (44), φραγμένη από κάτω. Απαιτούμε η U να είναι μη-αρνητική αν $\lambda = 0$. Τότε

$$U(x) \ge V_m(x), \quad \text{για όλα τα } x \in \Omega.$$

Άρα, η V_m είναι κάτω ημισυνεχής και η ελάχιστη υπερλύση ιξώδους του (44), κάτω φραγμένη (ή μη αρνητική, αν $\lambda = 0$).

(2) Υποθέτουμε ότι η g είναι τοπικά φραγμένη από πάνω και έστω U μία άνω ημισυνεχής υπολύση ιξώδους, ή μία κάτω ημισυνεχής κ.η.σ. υπολύση του (44), αντίστοιχα ως προς τα παρακάτω δύο τελικά συμπεράσματα της Πρότασης. Υποθέτουμε επίσης, ότι αν $\lambda > 0$ η U είναι φραγμένη από πάνω, ενώ, αν $\lambda = 0$, τότε $h(x, \alpha) \geq 0$ και $g(x) \geq c > 0$, για $x \in \bar{\Omega}$, $\alpha \in A$. Τότε

$$U(x) \leq V_M(x), \ x \in \Omega.$$

Άρα, αν $(V_M)^*$ πεπερασμένη, φραγμένη από πάνω αν $\lambda > 0$ και $(V_M)^* \leq \psi$ στο $\partial\Omega$, τότε είναι η μέγιστη υπολύση ιξώδους του (44). Επίσης, η $(V_M)_*$ είναι η μέγιστη κ.η.σ. υπολύση του (44), αν είναι φραγμένη από πάνω όταν $\lambda > 0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι συνέπεια των αρχών βελτιστότητας για την μ.δ.ε. του (44). Θεωρούμε τη U όπως αυτή είναι στο (1) του Θεωρήματος. Τότε, από την Πρόταση 5, η U ικανοποιεί την άνω αρχή βελτιστότητας στο Ω. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} U(x) &= \inf_{\alpha \in A} \sup_{t \in [0, \tau_x(\alpha))} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda s}[h(y_x(s), \alpha(s)) + g_*(y_x(s))]ds + e^{-\lambda t} U(y_x(t)) \right\} \\ &\geq \inf_{\alpha \in A} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda s}[h(y_x(s), \alpha(s)) + g_*(y_x(s))]ds + e^{-\lambda t} U(y_x(t)) \right\}, \end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0, \tau_x(\alpha))$. Επομένως, θα ισχύει ότι

$$U(x) \geq \inf_{\alpha \in A} \left\{ \int_0^{\tau_x(\alpha)} e^{-\lambda s}[h(y_x(s), \alpha(s)) + g_*(y_x(s))]ds + e^{-\lambda \tau_x(\alpha)} U(y_x(\tau_x(\alpha))) \right\}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- $\tau_x(\alpha) < +\infty$. Τότε

$$\begin{aligned} U(x) &\geq \inf_{\alpha \in A} \left\{ \int_0^{\tau_x(\alpha)} e^{-\lambda s}[h(y_x(s), \alpha(s)) + g_*(y_x(s))]ds \right. \\ &\quad \left. + \chi_{\{t | t < +\infty\}}(\tau_x(\alpha)) e^{-\lambda \tau_x(\alpha)} U(y_x(\tau_x(\alpha))) \right\} \\ &\geq V_m(x), \end{aligned}$$

  αφού $U(y_x(\tau_x(\alpha))) \geq \psi(y_x(\tau_x(\alpha)))$, μιας και $U \geq \psi$ στο $\partial\Omega$, εξ' ορισμού της υπερλύσης ιξώδους για το (44). Δηλαδή

$$U(x) \geq V_m(x).$$

- $\tau_x(\alpha) = +\infty$. Τότε,

– αν $\lambda > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} U(x) &\geq \inf_{\alpha\in A}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}[h(y_x(s),\alpha(s))+g_*(y_x(s))]ds\right\} \\ &= \inf_{\alpha\in A}\left\{\int_0^{\tau_x(\alpha)} e^{-\lambda s}[h(y_x(s),\alpha(s))+g_*(y_x(s))]ds\right. \\ &\quad \left. +\chi_{\{t|t<+\infty\}}(\tau_x(\alpha))e^{-\lambda\tau_x(\alpha)}\psi(y_x(\tau_x(\alpha)))\right\} \\ &= V_m(x). \end{aligned}$$

– αν $\lambda = 0$, έχουμε

$$U(x) \geq \inf_{\alpha\in A}\left\{\int_0^t [h(y_x(s),\alpha(s))+g_*(y_x(s))]ds + U(y_x(t))\right\},$$

για κάθε $t \in [0,+\infty)$. Επομένως, θα ισχύει ότι

$$U(x) \geq \inf_{\alpha\in A}\left\{\int_0^{\tau_x(\alpha)} [h(y_x(s),\alpha(s))+g_*(y_x(s))]ds + U(y_x(\tau_x(\alpha)))\right\}.$$

Η U είναι μη αρνητική, όταν $\lambda = 0$, άρα

$$\begin{aligned} U(x) &\geq \inf_{\alpha\in A}\left\{\int_0^{\tau_x(\alpha)} [h(y_x(s),\alpha(s))+g_*(y_x(s))]ds\right\} \\ &= \inf_{\alpha\in A}\left\{\int_0^{\tau_x(\alpha)} e^{-\lambda s}[h(y_x(s),\alpha(s))+g_*(y_x(s))]ds\right. \\ &\quad \left. +\chi_{\{t|t<+\infty\}}(\tau_x(\alpha))e^{-\lambda\tau_x(\alpha)}\psi(y_x(\tau_x(\alpha)))\right\} \\ &= V_m(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή, για κάθε $\lambda \geq 0$, έχουμε $U(x) \geq V_m(x)$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση,

$$U(x) \geq V_m(x).$$

Επίσης, αν η V_m είναι πεπερασμένη και φραγμένη από κάτω, τότε είναι τοπικά φραγμένη, άρα είναι μία (καθιερωμένη) λύση ιξώδους του (44). Επομένως, η $(V_m)_*$ είναι μία πεπερασμένη υπερλύση ιξώδους του (44) και, βάζοντας στο παραπάνω αποτέλεσμα όπου U την $(V_m)_*$, παίρνουμε ότι $(V_m)_* \geq V_m$, άρα η V_m είναι κάτω ημισυνεχής και, σύμφωνα με τα παραπάνω, η ελάχιστη υπερλύση ιξώδους του (44).

Η απόδειξη του (2) προκύπτει από την κάτω αρχή βελτιστότητας. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την περίπτωση της U ως *κ.η.σ.* υπολύση. Από τον ορισμό της *κ.η.σ.* υπολύσης και από την Πρόταση 5, προκύπτει ότι η U ικανοποιεί την κάτω αρχή βελτιστότητας στο $\mathbb{R}^N$. Τότε, ακριβώς όπως και στην απόδειξη του (1), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} U(x) &= \inf_{\alpha\in A} \inf_{t\in[0,\tau_x(\alpha))} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda s}[h(y_x(s),\alpha(s)) + g^*(y_x(s))]ds + e^{-\lambda t}U(y_x(t)) \right\} \\ &\leq \inf_{\alpha\in A} \left\{ \int_0^{\tau_x(\alpha)} e^{-\lambda s}[h(y_x(s),\alpha(s)) + g^*(y_x(s))]ds \right. \\ &\quad \left. + \chi_{\{t|t<+\infty\}}(\tau_x(\alpha))e^{-\lambda\tau_x(\alpha)}U(y_x(\tau_x(\alpha))) \right\} \\ &= V_M(x), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει λόγω του ότι από τον ορισμό 8 έχουμε ότι $U = \psi$ στο $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Αν $\lambda = 0$, μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση $\tau_x(\alpha) < +\infty$. Αυτό γιατί, αν $\tau_x(\alpha) = +\infty$, τότε

$$V_M(x) = \inf_{\alpha\in A} \int_0^{+\infty} [h(y_x(s),\alpha(s)) + g^*(y(s))]ds.$$

Είναι $h(x,\alpha) \geq 0$ και $g(x) \geq c > 0$, άρα και $g^*(y(t)) \geq c > 0$. Δηλαδή $h(y_x(t),\alpha(t)) + g^*(y(t)) > 0$, για κάθε $t \in [0,+\infty]$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι $+\infty$. Άρα, αν η $V_M(x)$ είναι πεπερασμένη, μία τέτοια τροχιά $y_x(t,\alpha)$ για την οποία $\tau_x(\alpha) = +\infty$, δεν είναι ποτέ βέλτιστη, οπότε εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $\tau_x(\alpha) < +\infty$. Από την προς τα πίσω αρχή δυναμικού προγραμματισμού, η $(V_M)_*$ είναι μία *κ.η.σ.* υπολύση του (44) (για την αρχή αυτή και την απόδειξη αυτού, βλέπε [1], σελ.344). Άρα, πράγματι, η $(V_M)_*$ είναι η μέγιστη *κ.η.σ.* υπολύση του (44). □

Το επόμενο Πόρισμα είναι άμεσο.

Πόρισμα 4 *Έστω ότι ισχύουν οι (41) και έστω A ένα σύνολο χαλαρών ελέγχων. Υποθέτουμε ότι η g είναι φραγμένη από κάτω και τοπικά φραγμένη από πάνω. Έστω $U : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη αν $\lambda > 0$ ή μη αρνητική αν $\lambda = 0$. Στην περίπτωση που το $\lambda = 0$, υποθέτουμε επίσης ότι $h(x,\alpha) \geq 0$ και $g(x) \geq c > 0$, για $x \in \bar{\Omega}$, $\alpha \in A$.*

(1) Αν U είναι μία λύση ιξώδους της μ.δ.ε. του (44) που λαμβάνει με συνεχή τρόπο τα συνοριακά δεδομένα ψ στο $\partial\Omega$, τότε $V_m \leq U_* \leq U \leq U^* \leq V_M$ στο Ω. Ειδικά, αν στο $x \in \Omega$ έχουμε $V_m(x) = V_M(x)$, τότε η U είναι συνεχής στο x.

(2) Αν U είναι μία κ.η.σ. λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (44), τότε $V_m \leq U \leq (V_M)_*$.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα εξηγούν τους ρόλους των ορισμών της λύσης ιξώδους και της *κ.η.σ.* λύσης και δίνουν άμεσους τύπους αναπαράστασης για τη μικρότερη υπερλύση και τη μεγαλύτερη υπολύση, ως συναρτήσεις αξίας των προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου που σχετίζονται με τη μ.δ.ε. που θέλουμε να λύσουμε. Επίσης, το ερώτημα της μοναδικότητας για το (44) ανάγεται σε μία θεωρητική ερώτηση απλού ελέγχου: Ισχύει ότι οι V_m και V_M είναι και οι δύο πεπερασμένες, ότι ικανοποιούν τις προαναφερθέντες συνθήκες φραξιμότητας και προσήμου και ότι $V_m \equiv V_M$ ή ότι $(V_M)_* \equiv V_m$, αντίστοιχα ;

Θα αναφερθούμε, τώρα, στο πρόβλημα μοναδικότητας για το (44). Είναι τώρα καθαρό γιατί η μοναδικότητα δεν ισχύει, γενικά. Στην πραγματικότητα, η μοναδικότητα είναι ανέφικτη αν το σύνολο των πηδημάτων της g έχει μη-κενό εσωτερικό. Παρ' όλ' αυτά, θα πετύχουμε μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για μοναδική λύση. Σχετίζεται με τη συνάρτηση αξίας V_m. Θεωρούμε την παρακάτω συνθήκη, την οποία συμβολίζουμε $(\mathbf{JC})_{\mathbf{x}}$:

$$\text{για το } x \in \Omega \text{ υπάρχουν ακολουθίες } x_n \to x \text{ και } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A, \text{ώστε}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_{x_n}(\alpha_n)} e^{-\lambda t}(h(y_{x_n}(t), \alpha_n(t)) + g_*(y_{x_n}(t)))dt$$
$$+\chi_{\{t|t<+\infty\}}(\tau_{x_n}(\alpha_n))e^{-\lambda\tau_{x_n}(\alpha_n)}\psi(y_{x_n}(\tau_{x_n}(\alpha_n))) = V_m(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_{x_n}(\alpha_n)} e^{-\lambda t}\left(g^*(y_{x_n}(t)) - g_*(y_{x_n}(t))\right)dt = 0.$$

Το παρακάτω Θεώρημα χαρακτηρίζει τη μοναδικότητα των *κ.η.σ.* λύσεων. Η μοναδικότητα των (καθιερωμένων) λύσεων ιξώδους των προβλημάτων συνοριακών τιμών χειρίζεται ομοίως, όπως φαίνεται στην παρατήρηση που ακολουθεί το Θεώρημα.

Θεώρημα 3 *Έστω ότι ισχύουν οι (41) και έστω A ένα σύνολο χαλαρών ελέγχων. Υποθέτουμε ότι τα δεδομένα g, h, ψ είναι φραγμένα από κάτω και επίσης ότι οι g, h, ψ είναι μη-αρνητικές αν $\lambda = 0$. Για $x \in \Omega$, έστω ότι η $V_m(x)$ είναι πεπερασμένη. Έχουμε ότι $V_m(x) = (V_M)_*(x)$ αν και μόνο αν ισχύει η $(JC)_x$. Επομένως, με τις υποθέσεις του Πορίσματος 4 (μέρος (2)), μία κ.η.σ. λύση του (44) είναι μοναδική αν και μόνο αν ισχύει η $(JC)_x$ για όλα τα $x \in \Omega$.*

Παρατήρηση 9 *Η συνθήκη $(JC)_x$ μπορεί να γίνει ελαφρώς πιο απλή. Αν $x_n \equiv x$, τότε η πρώτη συνθήκη στην $(JC)_x$ λέει ότι η $(\alpha_n)_n$ είναι μία ακολουθία αποδεκτών ελέγχων για την $V_m(x)$. Δηλαδή ακολουθία ελέγχων, οι οποίοι ελαχιστοποιούν την ποσότητα που έχουμε. Σε αυτήν την περίπτωση συμπεραίνουμε, όπως στο Θεώρημα 3, ότι $V_m(x) = V_M(x)$ αν και μόνο αν η $(JC)_x$ ισχύει με $x_n \equiv x$. Αυτό το γεγονός μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε τη μοναδικότητα των (καθιερωμένων) λύσεων ιξώδους του (44), οι οποίες προκύπτει επίσης ότι είναι συνεχείς στο Ω. Επομένως, έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα :*

Πόρισμα 5 *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3. Για $x \in \Omega$, έστω ότι η $V_m(x)$ είναι πεπερασμένη. Έχουμε ότι $V_m(x) = V_M(x)$*

αν και μόνο αν ισχύει η $(JC)_x$ *με* $x_n \equiv x$*, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει ότι υπάρχει ακολουθία* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$*, ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_x(\alpha_n)} e^{-\lambda t}(h(y_x(t),\alpha_n(t)) + g_*(y_x(t)))dt$$

$$+\chi_{\{t|t<+\infty\}}(\tau_x(\alpha_n))e^{-\lambda\tau_x(\alpha_n)}\psi(y_x(\tau_x(\alpha_n))) = V_m(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_x(\alpha_n)} e^{-\lambda t}\left(g^*(y_x(t)) - g_*(y_x(t))\right)dt = 0.$$

Επομένως, με τις υποθέσεις του Πορίσματος 4 (μέρος (1)), μία (καθιερωμένη) λύση ιξώδους του (44) είναι μοναδική αν και μόνο αν ισχύει η $(JC)_x$ *με* $x_n \equiv x$*, για όλα τα* $x \in \Omega$*.*

Παρατήρηση 10 *Αν* A *είναι ένα σύνολο χαλαρών ελέγχων, τότε η συνάρτηση αξίας* V_m *έχει βέλτιστες τροχιές σε κάθε σημείο. Αν* $\alpha \in A$ *είναι ένας βέλτιστος έλεγχος για την* $V_m(x)$ *και* $g^*(y_x(\cdot;\alpha)) = g_*(y_x(\cdot;\alpha))$ *σχεδόν παντού, τότε είναι προφανές ότι η* $(JC)_x$ *ισχύει, με τις σταθερές ακολουθίες* $x_n \equiv x$ *και* $\alpha_n \equiv \alpha$*. Επομένως, αυτή είναι μία ικανή συνθήκη για να έχουμε* $V_m(x) = V_M(x)$*.*

Αν από την άλλη, $V_m(x) = V_M(x)$ *και* $\alpha \in A$ *ένας βέλτιστος έλεγχος για την* $V_M(x)$*, τότε αποδεικνύεται ότι ο* α *είναι επίσης βέλτιστος και για την* $V_m(x)$ *και ότι* $g^*(y_x(\cdot;\alpha)) = g_*(y_x(\cdot;\alpha))$ *σχεδόν παντού. Η ύπαρξη βέλτιστων τροχιών για τη* V_M *είναι αμφισβητούμενη γενικά, επειδή το τρέχον κόστος της είναι μόνο άνω ημισυνεχής συνάρτηση. Όμως, αν υπάρχουν για την* $V_M(x)$ *βέλτιστες τροχιές στο* x*, μπορούμε να πούμε ότι* $V_m(x) = V_M(x)$ *αν και μόνο αν υπάρχει μία βέλτιστη τροχιά για την* $V_m(x)$*, τέτοια ώστε* $g^*(y_x(\cdot;\alpha)) = g_*(y_x(\cdot;\alpha))$ *σχεδόν παντού.*

Παρατήρηση 11 *Θέλουμε να δώσουμε ένα παράδειγμα, ούτως ώστε να υποστηρίξουμε τη θεωρία των κ.η.σ. λύσεων για τα προβλήματα συνοριακών τιμών, την παρουσία ασθενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet και να δείξουμε ότι η μοναδικότητα μπορεί να ισχύει για το πρόβλημα συνοριακών τιμών. Έστω* $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ *και θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών*

$$\begin{aligned} -u_x &= g \quad \text{στο} \ \ \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{στο} \ \ \partial\Omega, \end{aligned}$$

όπου $g(x,y) = \chi_{\left\{(x,y)|y\le\frac{1}{2}\right\}}$*. Αυτό είναι μέσα στο αντικείμενο μελέτης μας, διαλέγοντας* $\psi \equiv 0$*. Παρατηρούμε ότι* $f(x,y) \equiv (1,0)$*, οπότε υπολογίζουμε άμεσα, για* $y \neq \frac{1}{2}$*,*

$$V_m(x,y) = V_M(x,y) = \begin{cases} 1-x, & y < \frac{1}{2}, \\ 0, & y > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Όμως η V_m είναι κάτω ημισυνεχής, η V_M είναι άνω ημισυνεχής, είναι ασυνεχείς και διαφορετικές. Βλέπουμε ότι ο ορισμός της (καθιερωμένης) λύσης ιξώδους δεν έχει καλά αποτελέσματα για περιπτώσεις όπου οι λύσεις αναμένονται να είναι ασυνεχείς. Αλλά κάποιος εύκολα παρατηρεί ότι η συνθήκη $(JC)_x$ ισχύει στο Ω (πρέπει να κατασκευάσουμε την ακολουθία x_n κατάλληλα), οπότε $V_m = (V_M)_*$. Άρα, υπάρχει μία μοναδική κ.η.σ. λύση στο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Προσέξτε ότι η συνοριακή συνθήκη δεν λαμβάνεται σημειακά, αλλά μόνο με τη γενικευμένη έννοια.

Θα δούμε, τώρα, ένα άμεσο αποτέλεσμα μοναδικότητας. Οι τεχνικές λεπτομέρειες, όταν προσπαθούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3 σε ένα γενικό πλαίσιο, γίνονται περίπλοκες και το να πάρουμε ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας κάτω από ελάχιστες υποθέσεις φαίνεται να είναι δύσκολο εγχείρημα. Γι' αυτό μελετούμε διαφορετικά και συγκεκριμένα προβλήματα, χωριστά. Περιγράφουμε, τώρα, ένα σύνολο υποθέσεων.

(H1′) Θεωρούμε μία κλάση Χαμιλτονιανών, όπου $\lambda \geq 0$, το διανυσματικό πεδίο είναι απλά το $f(x, \alpha) = \alpha$, η $h \geq 0$ είναι συνεχής, φραγμένη και ικανοποιεί την (41) και το σύνολο των ελέγχων A είναι κυρτό, συμπαγές και περιέχει μία σφαίρα $\mathbb{R}^N \supset A \supset B_r(0)$ (παίρνουμε $r = 1$ για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς).

(H2′) Θεωρούμε ένα ανοιχτό υποσύνολο με μη-κενό σύνορο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ και υποθέτουμε ότι

$$\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^m \bar{\Omega}_i,$$

όπου κάθε Ω_i είναι ένα ανοιχτό, συνεκτικό χωρίο με Lipschitz σύνορο, $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ αν $i \neq j$ και κάθε $x \in \Omega$ ανήκει το πολύ σε δύο υποχωρία $\bar{\Omega}_i$.

(H3′) Υποθέτουμε ότι ο ασυνεχής συντελεστής $g : \bar{\Omega} \longrightarrow [c, +\infty)$, $c > 0$, είναι κάτω ημισυνεχής και τοπικά φραγμένος από πάνω. Επίσης, υποθέτουμε ότι είναι συνεχής σε κάθε Ω_i, ότι κοντά στο σύνορο του υποχωρίου η g παίρνει μία σταθερή τιμή g_i και ότι, για $x \in \partial\Omega_i$,

$$g(x) = \liminf_{(\Omega \setminus K) \ni y \to x} g(y), \tag{45}$$

όπου $K = \cup_{i=1}^m \partial\Omega_i$. Στην πραγματικότητα, τίποτα δεν θ' αλλάξει αν, εναλλακτικά, επιτρέψουμε στην g να παίρνει στο K τιμές μεγαλύτερες από το δεξιό μέλος της (45).

(H4′) Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (44) με ομογενή συνοριακή συνθήκη.

Παρατηρούμε ότι, με τις παραπάνω υποθέσεις, η κατηγορία των προβλημάτων μας περιέχει την εξίσωση εικόνας με αυστηρά θετικό δείκτη διάθλασης. Αυτή

είναι η
$$u_t+\frac{1}{2}|Du(x,t)|^2-V(x)=0,$$
με $V(x)=\frac{1}{2}n^2(x)$, όπου n ο δείκτης διάθλασης (οπότε, λόγω της υπόθεσης $(H3')$, έχουμε ότι $V(x)=g(x)\geq c>0$).

Θεώρημα 4 *Με τις υποθέσεις (H1′)-(H4′), το πρόβλημα συνοριακών τιμών (44) έχει μοναδική (καθιερωμένη και κ.η.σ.) λύση ιξώδους.*

Απόδειξη: Από Πρόταση την οποία παραλείπουμε (βλέπε [11], σελ.472), προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία (καθιερωμένη) λύση ιξώδους του προβλήματος συνοριακών τιμών και λαμβάνει συνεχώς τη συνοριακή συνθήκη. Έστω $x\in\Omega$. Θα εκμεταλλευτούμε το Θεώρημα 3, συγκεκριμένα την Παρατήρηση 9, και θα ελέγξουμε ότι ισχύει η σχέση $V_m(x)=V_M(x)$, δείχνοντας τη συνθήκη $(JC)_x$ με $x_n\equiv x$. Μπορούμε να βρούμε ένα βέλτιστο έλεγχο $\alpha\in A$ για το $V_m(x)$ και την αντίστοιχη βέλτιστη τροχιά $y_x(\cdot;\alpha)$ για το σύστημα (40). Με την ελευθερία που έχουμε από τις παραπάνω υποθέσεις που έχουμε κάνει, θα μετασχηματίσουμε τη βέλτιστη τροχιά για το $V_m(x)$ με έναν σχεδόν βέλτιστο τρόπο, ώστε να μην βρίσκεται στο σύνολο των πηδημάτων της g πέρα από έναν πεπερασμένο αριθμό χρόνων t, ώστε να μπορούμε να ελέγξουμε ότι η $(JC)_x$ ισχύει.

Αφού η $h+g$ είναι αυστηρώς θετική, ο χρόνος εξόδου για την βέλτιστη τροχιά είναι πεπερασμένος, δηλαδή $\tau_x(\alpha)<+\infty$. Σταθεροποιούμε $\epsilon>0$. Λόγω της συμπάγειας του $[0,\tau_x(\alpha)]$ μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε έναν πεπερασμένο αριθμό διαδοχικών, μη-κενών και κλειστών υποδιαστημάτων $I_1,...,I_k$ του $[0,\tau_x(\alpha)]$, τα οποία, ενδεχομένως, τέμνονται μόνο στα άκρα τους, η ένωσή τους είναι ολόκληρο το $[0,\tau_x(\alpha)]$ και επιπλέον ικανοποιούν την εξής ιδιότητα: για $i<k$, είτε η τροχιά $y_x(t;\alpha)\in\Omega_j$ για κάποιο δείκτη j και για όλα τα $t\in I_i$, είτε η τροχιά $y_x(t;\alpha)$, για $t\in I_i$, τέμνει το σύνορο ενός υποχωρίου $\partial\Omega_j$ για το πολύ δύο δείκτες και η $y_x(t;\alpha)$ παραμένει σε ένα υποσύνολο του $\bar{\Omega}$, όπου το $\partial\Omega_j$ μπορεί να θεωρηθεί σαν το γράφημα μίας Lipschitz συνεχούς συνάρτησης. Το τελευταίο διάστημα I_k θα επιλεγεί με την απαίτηση, κατά την οποία
$$\int_{s\in I_k}e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s))-g_*(y_x(s))\right)ds\leq\epsilon.$$
Είναι προφανές ότι, αν στο I_i η τροχιά μένει σε κάποιο υποχωρίο Ω_j, τότε αυτό δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα και μπορούμε να την αφήσουμε ως έχει. Για το I_k, ήδη δώσαμε τον υπολογισμό που χρειαζόμαστε. Η μόνη περίπτωση που μένει να θεωρήσουμε είναι, όταν σε κάποιο διάστημα $I_i,\ i<k$, η τροχιά τέμνει κάποιο σύνορο $\partial\Omega_j$. Σε τέτοια διαστήματα μετασχηματίζουμε την τροχιά ως εξής : Έστω $n:D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}^{N-1}$, μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση, της οποίας το γράφημα τοπικά αναπαριστά το $\partial\Omega_j$. Φυσικά, όλες οι επόμενες θεωρήσεις είναι τοπικές. Μετά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση g επιδέχεται μόνο δύο τιμές στις δύο πλευρές του γραφήματος. Υποθέτουμε ότι η g λαμβάνει

τις τιμές $g^+ > g^-$ στα σημεία πάνω και κάτω από το γράφημα της n, αντίστοιχα (δηλαδή έχουμε, ουσιαστικά, την τιμή g^+ μέσα στο Ω_j και την τιμή g^- έξω από αυτό). Οπότε η g παίρνει την τιμή g^- και στο $\partial\Omega_i$, επίσης. Μπορούμε να κανονίσουμε τις συντεταγμένες με τέτοιο τρόπο, ώστε $x = (x', x_n), x' \in D$ και ώστε να έχουμε ότι $x \in \partial\Omega_j$ αν και μόνο αν $x_n = n(x')$. Με x' συμβολίζουμε τις $n-1$ πρώτες συντεταγμένες του x και με x_n τη n-οστή συντεταγμένη του x. Ορίζουμε στο I_i την Lipschitz συνεχής συνάρτηση

$$s \to (y_x)_n(s,\alpha) - n((y_x)'(s,\alpha)) = \varphi(y_x(s,\alpha)).$$

Αυτή είναι Lipschitz γιατί η n είναι Lipschitz, ενώ έχουμε ότι $f = \alpha$ και το $A \subset \mathbb{R}^N$ είναι συμπαγές, άρα είναι φραγμένο, οπότε και η f είναι φραγμένη, άρα η $y'(t) = f(y(t), \alpha(t))$ είναι φραγμένη, επομένως η $y_x(t,\alpha)$ είναι και αυτή Lipschitz συνεχής. Από ιδιότητες των Lipschitz συνεχών συναρτήσεων (βλέπε [10], σελ.24) μπορούμε να διαλέξουμε $\delta > 0$ όσο μικρό θέλουμε, ούτως ώστε το σύνολο $\{s : \varphi(y_x(s,\alpha)) = \delta\}$ να είναι πεπερασμένο. Συμβολίζουμε, τώρα, με e_n το n-οστό στοιχείο της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^N$ και έχουμε

$$\begin{aligned} & \varphi(y_x(s,\alpha) - \delta e_n) = 0 \\ \Rightarrow\ & (y_x(s,\alpha) - \delta e_n)_n - n((y_x(s,\alpha) - \delta e_n)') = 0 \\ \Rightarrow\ & (y_x)_n(s,\alpha) - \delta - n((y_x)'(s,\alpha)) = 0 \\ \Rightarrow\ & \varphi(y_x(s,\alpha)) = \delta. \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση $\varphi(y_x(s,\alpha) - \delta e_n) = 0$ ικανοποιείται στο I_i το πολύ σε ένα πεπερασμένο υποσύνολό του. Υποθέτουμε για απλότητα, ότι $I_i = [0,1]$ και προσεγγίζουμε την τροχιά $y_x(\cdot,\alpha)$ στο I_i από τη νέα τροχιά

$$y_x(s,\alpha_\delta) = \begin{cases} x - se_n, & s \in [0,\delta], \\ y_x(s-\delta,\alpha) - \delta e_n, & s \in [\delta, 1+\delta], \\ y_x(1,\alpha) - [(1+2\delta) - s]e_n, & s \in [1+\delta, 1+2\delta], \end{cases}$$

θεωρούμενη με τον αποδεκτό έλεγχο (α είναι ο βέλτιστος έλεγχος που διαλέξαμε παραπάνω)

$$\alpha_\delta(s) = \begin{cases} -e_n, & s \in [0,\delta], \\ \alpha(s-\delta), & s \in [\delta, 1+\delta], \\ e_n, & s \in [1+\delta, 1+2\delta]. \end{cases}$$

Παρατήρηση 12 *Θα θέλαμε να δείξουμε ότι η $y_x(s,\alpha)$ βρίσκεται στο σύνολο των πηδημάτων της g για πεπερασμένους χρόνους s, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $(JC)_x$. Δηλαδή ότι $y_x(s,\alpha) \in \partial\Omega_j$ για πεπερασμένα $s \in I_i$. Αν $\varphi(y_x(s,\alpha)) = 0$, τότε $(y_x)_n(s,\alpha) = n((y_x)'(s,\alpha))$, άρα $y_x(s,\alpha) \in \partial\Omega_j$, δηλαδή, κατά κάποιο τρόπο, οι χρόνοι s στους οποίους υπάρχει πρόβλημα είναι ακριβώς αυτοί, για τους οποίους $\varphi(y_x(s,\alpha)) = 0$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi(y_x(s,\alpha)) = 0$, για πεπερασμένα $s \in I_i$. Αυτό το έχουμε όχι για την $y_x(s,\alpha)$, αλλά για την $y_x(s,\alpha) - \delta e_n$, οπότε μετασχηματίζουμε την $y_x(s,\alpha)$ στην $y_x(s,\alpha_\delta)$.*

Παρατήρηση 13 *Θα θέλαμε η νέα τροχιά $y_x(s,\alpha_\delta)$ (η οποία, ουσιαστικά, αποτελεί στο πεδίο ορισμού της μία μετατόπιση της βέλτιστης τροχιάς y_x κατά δ, ως προς τη $n-$οστή συντεταγμένη), να έχει τις εξής ιδιότητες στο $I_i = [0,1]$:*

α. $y_x(0,\alpha_\delta) = x$,

β. $y_x(s,\alpha_\delta) = y_x(s,\alpha) - \delta e_n$,

γ. $y_x(1,\alpha_\delta) = y_x(1,\alpha)$,

δ. $y_x(s,\alpha_\delta)$ *συνεχής.*

Για να επιτευχθούν τα παραπάνω, κυρίως η συνέχεια της $y_x(s,\alpha_\delta)$, ορίζουμε την $y_x(s,\alpha_\delta)$ όπως παραπάνω, με τρεις κλάδους, στα διαστήματα $[0,\delta], [\delta, 1+\delta], [1+\delta, 1+2\delta]$. Το ίδιο κάνουμε και για τον έλεγχο α_δ, ο οποίος θέλουμε στο $[\delta, 1+\delta]$ να συμπίπτει με τον βέλτιστο έλεγχο α στο I_i.

Διακρίνουμε, τώρα, τις εξής περιπτώσεις :

- για $s \in [0,\delta]$, είναι

$$\begin{aligned} & \varphi(y_x(s,\alpha_\delta)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x - se_n)_n - n((x-se_n)^{'}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_n - s - n(x') = 0. \end{aligned}$$

  Αυτή ικανοποιείται για το πολύ ένα s, ως γραμμική. Άρα, η $y_x(s,\alpha_\delta) \in \partial\Omega_j$, δηλαδή η $y_x(s,\alpha_\delta)$ βρίσκεται στο σύνολο των πηδημάτων της g, για το πολύ ένα s. Οπότε

$$\int_{s\in[0,\delta]} e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s)) - g_*(y_x(s))\right) ds = 0.$$

- για $s \in [\delta, 1+\delta]$, είναι

$$\begin{aligned} & \varphi(y_x(s,\alpha_\delta)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \varphi(y_x(s-\delta,\alpha) - \delta e_n) = 0. \end{aligned}$$

  Αυτή, όπως είπαμε, ικανοποιείται για πεπερασμένα $s \in I_i$. Άρα, η $g(y_x(s,\alpha_\delta))$ είναι συνεχής στο $[\delta, 1+\delta]$, εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο. Οπότε

$$\int_{s\in[\delta,1+\delta]} e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s)) - g_*(y_x(s))\right) ds = 0.$$

- για $s \in [1+\delta, 1+2\delta]$, είναι

$$\begin{aligned} & \varphi(y_x(s,\alpha_\delta)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y_x(1,\alpha) - [(1+2\delta) - s]e_n)_n - n((y_x(1,\alpha) - [(1+2\delta)-s]e_n)^{'}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y_x)_n(1,\alpha) - (1+2\delta) + s - n((y_x)^{'}(1,\alpha)) = 0. \end{aligned}$$

Ομοίως αυτή είναι γραμμική, άρα ικανοποιείται για ένα το πολύ s. Οπότε, όπως και στην πρώτη περίπτωση, έχουμε

$$\int_{s\in[1+\delta,1+2\delta]} e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s)) - g_*(y_x(s))\right) ds = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, η νέα τροχιά ικανοποιεί, από κατασκευή, τη σχέση

$$\int_{s\in[0,1+2\delta]} e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s)) - g_*(y_x(s))\right) ds = 0, \tag{46}$$

ενώ το κόστος της μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1+2\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha_\delta))ds = \int_0^{\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha_\delta))ds + \int_\delta^{1+\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha_\delta))ds \\
& + \int_{1+\delta}^{1+2\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha_\delta))ds \\
= \; & \int_0^{\delta} e^{-\lambda s} g(x - se_n)ds + \int_\delta^{1+\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha_\delta))ds \\
& + \int_{1+\delta}^{1+2\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(1,\alpha) - [(1+2\delta) - s]e_n)ds \\
\leq \; & \delta g^+ + \int_\delta^{1+\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha_\delta))ds + \delta g^+ \\
\leq \; & 2\delta g^+ + \int_\delta^{1+\delta} \liminf_{\delta\to 0}(e^{-\lambda s} g(y_x(s-\delta,\alpha_\delta(s))))ds \\
\leq \; & 2\delta g^+ + \liminf_{\delta\to 0} \int_\delta^{1+\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(s-\delta,\alpha_\delta(s)))ds \\
= \; & 2\delta g^+ + \liminf_{\delta\to 0} \int_0^{1} e^{-\lambda(u+\delta)} g(y_x(u,\alpha_\delta(u+\delta)))du \\
= \; & 2\delta g^+ + \liminf_{\delta\to 0} \int_0^{1} e^{-\lambda(u+\delta)} g(y_x(u,\alpha(u)))du \\
= \; & 2\delta g^+ + \int_0^{1} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha(s)))ds \\
\Rightarrow \; & \int_0^{1+2\delta} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha_\delta))ds \leq 2\delta g^+ + \int_{I_i} e^{-\lambda s} g(y_x(s,\alpha(s)))ds. \qquad (47)
\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ανισότητα έγινε χρήση της σχέσης (45) που ισχύει για την g, καθώς και του ότι η g είναι κάτω ημισυνεχής. Στην τρίτη ανισότητα εφαρμόζουμε το Λήμμα του Fatou (η g είναι μετρήσιμη και γνησίως θετική). Ομοίως μπορεί να γραφεί μία παρόμοια εκτίμηση για το μέρος του τρέχοντος κόστους που περιέχει τον συνεχή όρο h. Η h είναι συνεχής στο $[0, 1+2\delta]$, άρα θα έχει μέγιστο στο διάστημα αυτό, έστω M_δ. Έτσι, όπως προηγουμένως, προκύπτει ότι

$$\int_0^{1+2\delta} e^{-\lambda s} h(y_x(s,\alpha_\delta),\alpha_\delta(s))ds \leq 2M_\delta\cdot\delta + \int_{I_i} e^{-\lambda s} h(y_x(s,\alpha(s)),\alpha(s))ds. \quad (48)$$

Τώρα μπορεί εύκολα κάποιος να κανονίσει το δ στα διαφορετικά υποδιαστήματα και να κατασκευάσει μία ακολουθία ελέγχων που να ικανοποιεί την $(JC)_x$ με $x_n \equiv x$, δηλαδή τις εξής δύο σχέσεις :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\tau_x(\alpha_n)} e^{-\lambda s}(h(y_x(s,\alpha_n),\alpha_n(s)) + g_*(y_x(s,\alpha_n)))ds = V_m(x)$$

$$= \int_0^{\tau_x(\alpha)} e^{-\lambda s}(h(y_x(s,\alpha),\alpha(s)) + g_*(y_x(s,\alpha)))ds$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\tau_x(\alpha_n)} e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s,\alpha_n)) - g_*(y_x(s,\alpha_n))\right)ds = 0.$$

Παίρνουμε $\delta_n \to 0$ καθώς $n\to\infty$ και $\alpha_n = \alpha_{(\delta_n)}$. Τότε έχουμε ότι $\alpha_n \to \alpha$ καθώς $n\to\infty$ (αφού $\alpha_\delta \to \alpha$ καθώς $\delta\to 0$), $y_x(t;\alpha_n)\to y_x(t;\alpha)$, άρα και $\tau_x(\alpha_n)\to\tau_x(\alpha)$ καθώς $n\to\infty$. Οπότε υπάρχει N αρκετά μεγάλο, τέτοιο ώστε, για κάθε $n\geq N$, να ισχύει ότι το δ_n είναι αρκετά μικρό ώστε να ισχύει η σχέση (46), καθώς και ότι $[0,\tau_x(\alpha_n)]\subset\cup_{i=1}^k I_i$. Έτσι, έχουμε :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau_x(\alpha_n)} e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s,\alpha_n)) - g_*(y_x(s,\alpha_n))\right)ds \\
\leq\ &\int_{\cup_{i=1}^k I_i} e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s,\alpha_{(\delta_n)})) - g_*(y_x(s,\alpha_{(\delta_n)}))\right)ds \\
=\ &\int_{I_k} e^{-\lambda s}\left(g^*(y_x(s,\alpha)) - g_*(y_x(s,\alpha))\right)ds \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Το ϵ επιλέχτηκε τυχαία, άρα ικανοποιείται η δεύτερη σχέση της $(JC)_x$ (μπορούμε να δεχτούμε ότι η νέα τροχιά ταυτίζεται με την παλιά σε κάθε διάστημα, εκτός των προβληματικών I_i, δηλαδή $y_x(s,\alpha_{(\delta_n)}) = y_x(s,\alpha)$. Αυτό, μαζί με τη σχέση (46), είναι αυτά που χρησιμοποιούμε στην τελευταία ισότητα, παραπάνω). Την πρώτη σχέση της $(JC)_x$ αρκεί, προφανώς, να τη δείξουμε για τα προβληματικά I_i, δηλαδή στο $[0,1+2\delta]$ (αφού $\tau_x(\alpha_n)\to\tau_x(\alpha)$, στα άλλα διαστήματα προφανώς ισχύει, ενώ όπως είπαμε, σε αυτά, η νέα τροχιά και ο νέος έλεγχος ταυτίζονται με τα παλιά). Εκεί, με χρήση του ότι η g είναι *κ.η.σ.* (δηλαδή $g_* = g$) και από τις σχέσεις (47) και (48), έχουμε :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1+2\delta_n} e^{-\lambda s}(g(y_x(s,\alpha_{\delta_n})) + h(y_x(s,\alpha_{\delta_n}),\alpha_{\delta_n}(s)))ds \\
\leq\ & 2\delta_n(g^+ + M_{\delta_n}) + \int_{I_i} e^{-\lambda s}(g(y_x(s,\alpha(s))) + h(y_x(s,\alpha(s)),\alpha(s)))ds
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{1+2\delta_n} e^{-\lambda s}(h(y_x(s,\alpha_{\delta_n}),\alpha_{\delta_n}(s)) + g_*(y_x(s,\alpha_{\delta_n})))ds$$
$$-\int_{I_i} e^{-\lambda s}(h(y_x(s,\alpha(s)),\alpha(s)) + g_*(y_x(s,\alpha(s))))ds \leq 2\delta_n(g^+ + M_{\delta_n}).$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, προκύπτει ότι

$$\int_0^{1+2\delta_n} e^{-\lambda s}(h(y_x(s,\alpha_{\delta_n}),\alpha_{\delta_n}(s)) + g_*(y_x(s,\alpha_{\delta_n})))ds$$
$$-\int_{I_i} e^{-\lambda s}(h(y_x(s,\alpha(s)),\alpha(s)) + g_*(y_x(s,\alpha(s))))ds \geq 2\delta_n(g^- + m_{\delta_n}),$$

όπου m_{δ_n} το ελάχιστο της h στο $[0, 1+2\delta_n]$. Παίρνοντας $n \to \infty$ στις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο, ότι ισχύει, δηλαδή, και η πρώτη σχέση της $(JC)_x$ για την επιλεγμένη ακολουθία ελέγχων. □

Παρατήρηση 14 *Αξίζει να αναφέρουμε ότι, ούτε η ομαλότητα του συνόλου των πηδημάτων της g, ούτε το γεγονός ότι το σύνολο έχει μέτρο μηδέν, είναι αναγκαίες συνθήκες, ώστε να έχουμε μοναδικότητα στο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Από την άλλη όμως, όπως παρατηρήσαμε ήδη, αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μοναδικότητας είναι η ύπαρξη κενού εσωτερικού του συνόλου πηδημάτων της g. Τα δύο αυτά γεγονότα φαίνονται καθαρά αν, π.χ., θεωρήσουμε ένα ανοιχτό σύνολο Ω και ένα οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο $K \subset \Omega$ με πιθανόν θετικό μέτρο αλλά κενό εσωτερικό. Αν μελετήσουμε την επιλυσιμότητα της εξίσωσης εικόνας*

$$|Du| = \chi_K \qquad \text{στο} \quad \Omega,$$

με ομογενή συνοριακή συνθήκη, φαίνεται άμεσα ότι $V_m \equiv 0 \equiv V_M$, επομένως ισχύει η μοναδικότητα.

Αναφορές

[1] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta : *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[2] G. Barles : *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Mathématiques et Applications **17**, Springer-Verlag, 1994.

[3] G. Barles and B. Perthame : *Comparison Principle for Dirichlet-Type Hamilton-Jacobi Equations and Singular Perturbations of Degenerated Elliptic Equations*, Appl. Math. and Opt., **21**, (1990), 21-44.

[4] G. Barles and B. Perthame : *Exit-time problems in optimal control and vanishing viscosity method*, SIAM J. Control Optim., **26**, No. 5, (1988), 1133-1148.

[5] G. Barles and B. Perthame : *Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping-time problems*, **21**, No. 4, (1987), 557-579.

[6] G. Barles and E. Rouy : *Deterministic and Stochastic Exit Time Control Problems and Hamilton-Jacobi-Bellman Equations with generalized Dirichlet boundary conditions*, Université de Tours, Faculté des Sciences et Techniques, Report.

[7] A. Briani : *Notes on viscosity solution for partial differential equations*, Dublin City University, January-March 2002, Report.

[8] K. Kuratowski : *Topology, Volume II*, Academic Press, New York and London, 1968.

[9] J. Macki, A. Strauss : *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1982.

[10] F. Morgan : *Geometric measure theory: A beginner's guide*, Academic Press Third Edition, 2000.

[11] P. Soravia : *Boundary Value Problems for Hamilton-Jacobi Equations with Discontinuous Lagrangian*, Indiana Univ. Math. J., **51**, No. 2, (2002), 451-477.