

Άσκηση E1.1 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $v \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$, η οποία έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a, b]$, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\left(\int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \left(\int_a^b |v'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Άσκηση E1.2 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $v \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ για την οποία ισχύει ότι $\int_a^b v(x) dx = 0$, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\left(\int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \left(\int_a^b |v'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Άσκηση E1.3 : Δείξτε ότι υπάρχουν σταθερές $C_{1,*} > 0$ και $C_{2,*} > 0$, οι οποίες εξαρτώνται από τα a και b , τέτοιες ώστε:

$$\max_{z \in [a, b]} |v(z)|^2 \leq C_{1,*} \left[\min_{x \in [a, b]} |v(x)|^2 + \int_a^b |v'(x)|^2 dx \right] \quad \forall v \in C^1[a, b]$$

και

$$\max_{z \in [a, b]} |v(z)|^2 \leq C_{2,*} \int_a^b (|v(x)|^2 + |v'(x)|^2) dx \quad \forall v \in C^1[a, b].$$

Άσκηση E1.4 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a, b]$ τέτοια ώστε

$$(1) \quad \begin{aligned} -u''(x) + q(x)u(x) &= f(x) \quad \forall x \in [a, b], \\ u'(a) &= u'(b) = 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a, b]$ και $q \in C[a, b]$ με $q \geq 0$ και $q \neq 0$.

α) Δείξτε ότι το πρόβλημα (1) έχει μοναδική λύση.

β) Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται από τα a, b και q , τέτοια ώστε:

$$\int_a^b (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u''(x)|^2) dx \leq C \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Άσκηση 1.5 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a, b]$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu &= f \quad \text{στο } [a, b], \\ u(a) &= u(b) = 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a, b]$, $q \in C[a, b]$ με $q \geq 0$, και $p \in C^1[a, b]$ με $\inf_{[a, b]} p > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται από τα a, b, p και q , τέτοια ώστε:

$$\int_a^b (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u''(x)|^2) dx \leq C \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Άσκηση 1.6 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a, b]$ τέτοια ώστε

$$(2) \quad \begin{aligned} &-(pu')' + qu = f \quad \text{στο } [a, b], \\ &p(a)u'(a) = \gamma_1 u(a), \\ &p(b)u'(b) = -\gamma_2 u(b), \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a, b]$, $q \in C[a, b]$ με $q \geq 0$, $p \in C^1[a, b]$ με $\inf_{[a, b]} p > 0$, και γ_1, γ_2 μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί με $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$.

α) Δείξτε ότι το πρόβλημα (2) έχει μοναδική λύση.

β) Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται από τα a, b, p και q , τέτοια ώστε:

$$\int_a^b (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u''(x)|^2) dx \leq C \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Σημείωση: Όταν $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, τότε $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ και το πρόβλημα (2) είναι ένα πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Neumann γενικότερο εκείνου στην Άσκηση 1.4. Σαυτήν την περίπτωση για να έχουμε μοναδικότητα λύσης υποθέτουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση q δεν είναι μηδενική. (Γιατί;).

Άσκηση 1.7 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a, b]$ τέτοια ώστε

$$(3) \quad \begin{aligned} &-(pu')' + gu' + qu = f \quad \text{στο } [a, b], \\ &u(a) = u(b) = 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a, b]$, $g \in C^1[a, b]$, $q \in C[a, b]$, και $p \in C^1[a, b]$ με $\inf_{[a, b]} p > 0$. Δείξτε ότι το πρόβλημα (3) έχει μοναδική λύση στις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) $2q(x) - g'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$,

β) $\frac{g^2(x)}{4p(x)} + q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Υπόδειξη: α) Εφαρμόστε τη μέθοδο ενέργειας και στη συνέχεια κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη στον όρο $\int_a^b g(x)u'(x)u(x) dx$. β) Εφαρμόστε τη μέθοδο ενέργειας και χρησιμοποιείτε κατάλληλα την ανισότητα Cauchy-Schwarz στον όρο $\int_a^b g(x)u'(x)u(x) dx$.

Σημείωση: Μπορείτε να βρείτε συνθήκες διαφορετικές των α) και β) που όταν ικανοποιούνται από τα δεδομένα του προβλήματος (3) να εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της λύσης του (3);