

Άσκηση 2.1 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, $J \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{J+1}$, και

$$X_J := \left\{ (v_i)_{i=0}^{J+1} \in \mathbb{R}^{J+2} : \exists i_* \in \{0, \dots, J+1\} \text{ τ.ω. } v_{i_*} = 0 \right\}.$$

Δείξτε ότι

$$\left(h \sum_{i=0}^{J+1} |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \left(h \sum_{i=0}^J \left| \frac{v_{j+1}-v_j}{h} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in X_J.$$

Άσκηση 2.2 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a, b]$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} -u''(x) + q(x)u(x) &= f(x) \quad \forall x \in [a, b], \\ u'(a) &= u'(b) = 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a, b]$ και $q \in C[a, b]$ με $q \geq 0$ και $q \neq 0$.

Έστω $J \in \mathbb{N}$ με $J \geq 3$, $h = \frac{b-a}{J}$ και $x_j = a + jh$ για $j = 0, \dots, J$. Για $j = 0, \dots, J$, κατασκευάζουμε προσέγγιση U_j του $u(x_j)$, με βάση τις ακόλουθες απαιτήσεις:

$$\begin{aligned} -\frac{U_{j+1}-2U_j+U_{j-1}}{h^2} + q(x_j)U_j &= f(x_j), \quad j = 1, \dots, J-1, \\ U_0 &= U_1, \quad U_J = U_{J-1}, \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\frac{U_2-U_1}{h^2} + q(x_1)U_1 = f(x_1), \\ & -\frac{U_{j+1}-2U_j+U_{j-1}}{h^2} + q(x_j)U_j = f(x_j), \quad j = 2, \dots, J-2, \\ & -\frac{U_{J-2}-U_{J-1}}{h^2} + q(x_{J-1})U_{J-1} = f(x_{J-1}). \end{aligned}$$

α) Διατυπώστε και εκτιμήστε το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου (1).

β) Δείξτε ότι:

$$h \sum_{j=1}^{J-2} \left| \frac{U_{j+1}-U_j}{h} \right|^2 + h \sum_{j=1}^{J-1} q(x_j) |U_j|^2 = h \sum_{j=1}^{J-1} f(x_j) U_j.$$

γ) Δείξτε ότι η μέθοδος (1) είναι καλά ορισμένη. Είναι ο πίνακας του γραμμικού συστήματος συμμετρικός και θετικά ορισμένος;

δ) Δείξτε ότι η μέθοδος (1) συγκλίνει ως προς τη νόρμα μεγίστου με τάξη 1 ως προς h .

Σημείωση: Η παραπάνω μέθοδος στηρίζεται στην παρατήρηση ότι $u(x_1) = u(a) + hu'(a) + O(h^2)$ και $u(x_{J-1}) = u(b) - hu'(b) + O(h^2)$. Έτσι, λόγω των συνοριακών συνθηκών Neumann, παίρνουμε ότι: $u(b) = u(x_{J-1}) + O(h^2)$ και $u(a) = u(x_1) + O(h^2)$. Θα περίμενε κανείς ότι η μέθοδος που προκύπτει έχει τάξη 2. Αυτό δε συμβαίνει διότι, μετά την απαλοιφή των U_0 και U_J , η μέθοδος που προκύπτει υπολογίζει προσεγγίσεις της u μόνο στους εσωτερικούς κόμβους και η τάξη σύγκλισής της επηρεάζεται από την τάξη προσέγγισης της u'' στους κόμβους x_1 και x_{J-1} .

Άσκηση 2.3 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a, b]$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} -u''(x) + q(x)u(x) &= f(x) \quad \forall x \in [a, b], \\ u'(a) &= u'(b) = 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a, b]$ και $q \in C[a, b]$ με $q \geq 0$ και $q \neq 0$.

Έστω $J \in \mathbb{N}$ με $J \geq 3$, $h = \frac{b-a}{J}$ και $x_j = a + jh$ για $j = 0, \dots, J$. Για $j = 1, \dots, J-1$, κατασκευάζουμε προσέγγιση U_j του $u(x_j)$, με βάση τις ακόλουθες απαιτήσεις:

$$(2) \quad \begin{aligned} & -\frac{2}{3} \frac{U_2 - U_1}{h^2} + q(x_1) U_1 = f(x_1), \\ & -\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + q(x_j) U_j = f(x_j), \quad j = 2, \dots, J-2, \\ & -\frac{2}{3} \frac{U_{J-2} - U_{J-1}}{h^2} + q(x_{J-1}) U_{J-1} = f(x_{J-1}). \end{aligned}$$

α) Διατυπώστε και εκτιμήστε το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου (2).

β) Δείξτε ότι:

$$h \sum_{j=1}^{J-2} \left| \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right|^2 + h \sum_{j=1}^{J-1} q(x_j) |U_j|^2 = h \sum_{j=1}^{J-1} f(x_j) U_j.$$

όπου

$$\sum_{j=1}^{J-1} a_j = \frac{3}{2} a_1 + \sum_{j=2}^{J-2} a_j + \frac{3}{2} a_{J-1}.$$

γ) Δείξτε ότι η μέθοδος (2) είναι καλά ορισμένη. Είναι ο πίνακας του γραμμικού συστήματος συμμετρικός και θετικά ορισμένος;

δ) Δείξτε ότι η μέθοδος (2) συγκλίνει ως προς τη νόρμα μεγίστου με τάξη 2 ως προς h .

Σημείωση: Η μέθοδος (2) είναι μια « διόρθωση » της μεθόδου (1).

Άσκηση 2.4 : Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a, b]$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} & -(pu')' + \gamma u' + qu = f \quad \text{στο } [a, b], \\ & u(a) = u(b) = 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a, b]$, $q \in C[a, b]$, $p \in C^1[a, b]$ με $\inf_{[a, b]} p > 0$, και $\gamma \in C^1[a, b]$ με $q - \frac{1}{2}\gamma' \geq 0$ στο $[a, b]$.

Έστω $J \in \mathbb{N}$ με $J \geq 3$, $h = \frac{b-a}{J+1}$ και $x_j = a + jh$ για $j = 0, \dots, J+1$. Για $j = 0, \dots, J+1$, κατασκευάζουμε προσέγγιση U_j του $u(x_j)$, με βάση τις ακόλουθες απαιτήσεις:

$$(3) \quad \begin{aligned} & -\left(p_{j+\frac{1}{2}} \frac{U_{j+1} - U_j}{h^2} - p_{j-\frac{1}{2}} \frac{U_j - U_{j-1}}{h^2}\right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\gamma_{j+\frac{1}{2}} \frac{U_{j+1} - U_j}{h} + \gamma_{j-\frac{1}{2}} \frac{U_j - U_{j-1}}{h}\right) + q(x_j) U_j = f(x_j), \quad j = 1, \dots, J, \\ & U_0 = 0, \quad U_{J+1} = 0, \end{aligned}$$

όπου $p_{j+\frac{1}{2}} := p(x_j + \frac{h}{2})$, $p_{j-\frac{1}{2}} := p(x_j - \frac{h}{2})$, $\gamma_{j+\frac{1}{2}} := \gamma(x_j + \frac{h}{2})$ και $\gamma_{j-\frac{1}{2}} := \gamma(x_j - \frac{h}{2})$.

α) Διατυπώστε και εκτιμήστε το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου (3).

β) Δείξτε ότι η μέθοδος (3) είναι καλά ορισμένη για μικρό h . Είναι ο πίνακας του γραμμικού συστήματος συμμετρικός και θετικά ορισμένος;

γ) Δείξτε ότι: όταν το h είναι αρκετά μικρό τότε η μέθοδος (3) συγκλίνει ως προς τη νόρμα μεγίστου με τάξη 2 ως προς h .

Σημείωση: Η απαίτηση « μικρό h » στο (β) ή « h αρκετά μικρό » στο (γ) σημαίνει ότι το αντίστοιχο αποτέλεσμα εξασφαλίζεται όταν $Ch \leq 1$, όπου $C \geq 0$ είναι μια σταθερά η οποία είναι ανεξάρτητη από το h . Αυτή η απαίτηση εισάγει ένα περιορισμό για το πόσο μικρό μπορεί να είναι το J , δηλ. $C(b-a) - 1 \leq J$. Όταν η σταθερά C είναι ίση με 0 τότε δεν προκύπτει κάποιος περιορισμός, και αυτό συμβαίνει π.χ. όταν η συνάρτηση γ είναι σταθερά στο $[a, b]$.

Υπόδειξη: Η συνέπεια στηρίζεται στις προσεγγίσεις $g(x_j) \simeq \frac{1}{2} \left[g(x_j + \frac{h}{2}) + g(x_j - \frac{h}{2}) \right]$ και $g'(x_j) \simeq \frac{1}{h} \left[g(x_j + \frac{h}{2}) - g(x_j - \frac{h}{2}) \right]$, οι οποίες προκύπτουν χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον τύπο του Taylor.

Γ. Ζουράρης