

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ,
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ,
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Άσκηση 10.1. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0 \quad \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(0, y) &= \sin(\pi y), \quad u(1, y) = 0 \quad \forall y \in [0, 1], \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(x, 1) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Άσκηση 10.2. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0 \quad \forall (x, y) \in D, \\ u(2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta)) &= \cos(\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \\ u(\cos(\theta), \sin(\theta)) &= 1 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

όπου $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$.

Άσκηση 10.3. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= xy \quad \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(0, y) &= u(1, y) = 0 \quad \forall y \in [0, 1], \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Άσκηση 10.4. Βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= 5 u_{xx}(t, x) + t + x \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) &= \sin(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Άσκηση 10.5. Βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= u_{xx}(t, x) + f(t, x) \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) &= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

με

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1], \end{cases} \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Γ. Ζουράρης