

Άσκηση 2.1. Βρείτε το μέγιστο δυνατό διάστημα I για το οποίο $1 \in I$ και υπάρχει συνάρτηση $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$[y^2(t) - y(t)] + [t + y(t)] y'(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

$$y(1) = 1.$$

Υπόδειξη. Βρείτε ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y) = \tilde{\mu}(y)$.

Άσκηση 2.2. Δίνεται η ακόλουθη ΣΔΕ πρώτης τάξης:

$$M(t, y(t)) + N(t, y(t)) y'(t) = 0,$$

όπου $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) Εξετάστε πότε η ΣΔΕ έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x, y) = \tilde{\mu}(xy)$.

β) Έστω ότι $M(x, y) = y g(xy)$ και $N(x, y) = x f(xy)$, όπου $f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Δείξτε ότι η ΣΔΕ έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x, y) = \tilde{\mu}(xy)$ και βρείτε τον τύπο του.

Άσκηση 2.3. Βρείτε το μέγιστο δυνατό διάστημα I για το οποίο $1 \in I$ και υπάρχει συνάρτηση $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$[t y^2(t) - y(t)] - t y'(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

$$y(1) = 1.$$

Υπόδειξη. Βρείτε ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y) = \tilde{\mu}(xy)$ εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 2.2.

Άσκηση 2.4. Βρείτε σε πεπλεγμένη μορφή τη λύση της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$[y(t) - t y^2(t)] + [t + t^2 y^2(t)] y'(t) = 0$$

Υπόδειξη. Βρείτε ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y) = \tilde{\mu}(xy)$.

Άσκηση 2.5. Βρείτε σε πεπλεγμένη μορφή τη λύση της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$[3t + 2y(t) + y^2(t)] + [t + 4ty(t) + 5y^2(t)] y'(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Βρείτε ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y) = \tilde{\mu}(x + y^2)$.

Άσκηση 2.6. Βρείτε το μέγιστο δυνατό διάστημα I για το οποίο $1 \in I$ και υπάρχει συνάρτηση $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$y'(t) = \frac{2y^4(t) + t^4}{t y^3(t)} \quad \forall t \in I,$$

$$y(1) = 1.$$

Υπόδειξη. Παρατηρείστε ότι είναι ομογενής.

Άσκηση 2.7. Έστω $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ δοθέντες πραγματικοί αριθμοί. Βρείτε το μέγιστο δυνατό διάστημα I για το οποίο $t_0 \in I$ και υπάρχει συνάρτηση $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$y'(t) = |y(t)| \quad \forall t \in I,$$

$$y(t_0) = y_0.$$