

Άσκηση 3.1. Βρείτε συνάρτηση $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) &= 1 + t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(1) &= 1, \quad y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.2. Βρείτε διάστημα I και συναρτήσεις $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ τέτοιες ώστε η συνάρτηση $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $y(t) = \sin(t^2)$ να είναι η λύση της ΣΔΕ

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Άσκηση 3.3. Έστω I διάστημα, $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ και $y_1, y_2 \in C^2(I, \mathbb{R})$ λύσεις της ΣΔΕ

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Αν η Wroskian των y_1, y_2 είναι σταθερή στο διάστημα I , τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους συντελεστές p, q ;

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Abel.

Άσκηση 3.4. Βρείτε συνάρτηση $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) &= \cos(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(1) &= 0, \quad y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.5. Έστω I διάστημα, $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, $q \in C(I, \mathbb{R})$, $y_1, y_2 \in C^2(I, \mathbb{R})$ λύσεις της ΣΔΕ

$$(py')'(t) + q(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

και $W(\cdot, y_1, y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}$ η Wroskian των y_1, y_2 . Αν η συνάρτηση p δεν αλλάζει πρόσημο στο I , βρείτε την $W(\cdot, y_1, y_2)$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Abel.

Άσκηση 3.6. Έστω I διάστημα, $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, $t_0 \in I$ και $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} y''(t) + p(t)y'(t) + p'(t)y(t) &= 0 \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y_1. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $(py)' = py' + p'y$.

Άσκηση 3.7. Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$, και f, g μη μηδενικά πολυώνυμα βαθμού το πολύ m . Στη συνέχεια ορίζουμε τις συναρτήσεις $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} f(t)$ και $y_2(t) = e^{\lambda_2 t} g(t)$.

α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα I .

β) Εξετάστε σε ποια διαστήματα I και για ποιές συναρτήσεις $p, q \in C(I, \mathbb{R})$, οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ΣΔΕ

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Γ. Ζουράρης