

Άσκηση 4.1. Βρείτε το σύνολο των λύσεων $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$y''(t) + \kappa y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου κ μία θετική πραγματική σταθερά.

Άσκηση 4.2. Βρείτε τη λύση $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ του ακόλουθου προβλήματος:

$$(1 + e^t) y''(t) + y'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Άσκηση 4.3. Έστω r πολυώνυμο βαθμού ακριβώς 2, δηλ. $r(t) = r_2 t^2 + r_1 t + r_0$ με $r_2 \neq 0$ και η ακόλουθη ΣΔΕ:

$$r(t) y''(t) - r'(t) y'(t) + r''(t) y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

α) Δείξτε ότι η παραπάνω ΣΔΕ έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ οι οποίες είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ 2.

β) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε:

$$W(t, y_1, y_2) = C r(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

γ) Όταν το πολυώνυμο r έχει πραγματικές ρίζες πως συνδέεται το αποτέλεσμα στο (β) με το Θεώρημα Abel.

Άσκηση 4.4. Βρείτε τη λύση $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$y''(t) + t y' + e^{-t^2} y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Αναζητήστε λύση της μορφής $y(t) = z(\psi(t))$ όπου $\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ με $\psi'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Προσδιορίστε την ψ έτσι ώστε η ΣΔΕ ως προς z να έχει σταθερούς συντελεστές.

Άσκηση 4.5. Βρείτε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $y_1, y_2 \in C^2(I, \mathbb{R})$ της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$(2t + 1) y''(t) + 4t y'(t) - 4y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Υπόδειξη. Εξετάστε πρώτα αν υπάρχει λύση της μορφής $e^{\alpha t}$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την τεχνική υποβιβασμού τάξης βρείτε μια δεύτερη λύση.

Σημείωση. Επειδή ο συντελεστής $(2t + 1)$ του $y''(t)$ μηδενίζεται στο $t = \frac{1}{2}$, η θεωρία εγγυάται την ύπαρξη λύσης σε κάθε διάστημα που δεν περιέχει το $\frac{1}{2}$ διότι τότε μπορούμε να τη γράψουμε στη μορφή $y''(t) + p(t) y'(t) + q(t) y(t) = 0$. Το αν υπάρχει λύση σε διάστημα που περιέχει το $\frac{1}{2}$ εξαρτάται από το αν μπορούμε να επεκτείνουμε τις λύσεις που θα βρούμε έτσι ώστε να είναι λύσεις της ΣΔΕ στο $\frac{1}{2}$.

Άσκηση 4.6. Βρείτε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $y_1, y_2 \in C^2(I, \mathbb{R})$ της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$t y''(t) - (2t + 1) y'(t) + (t + 1) y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Υπόδειξη. Εξετάστε πρώτα αν υπάρχει λύση της μορφής $e^{\alpha t}$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το θεώρημα Abel βρείτε μια δεύτερη λύση.

Άσκηση 4.7. Βρείτε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $y_1, y_2 \in C^2(I, \mathbb{R})$ της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$(t - 1) y''(t) + (t - 3) y'(t) - y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Υπόδειξη. Εξετάστε πρώτα αν υπάρχει λύση η οποία να είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού 2. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το θεώρημα Abel βρείτε μια δεύτερη λύση.

Άσκηση 4.8. Έστω $I = (0, +\infty)$ ή $I = (-\infty, 0)$. Βρείτε τη γενική λύση $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ της ακόλουθης μη ομογενούς ΣΔΕ Euler:

$$t^2 y''(t) + \frac{5}{2} t y'(t) - y(t) = e^t \quad \forall t \in I.$$

Γ. Ζουράρης