Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

MEM-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2019
Φροντιστηριο Ασκησεων 5

Άσκηση 5.1. Να βρεθεί η γενική λύση των ΣΔΕ:

α) $y''(t) + 4\,y(t) = \cos(2t)$,

β) $y''(t) + 4\,y'(t) + 4\,y(t) = \sin(2t)$,

γ) $y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = e^t(1 + 2\,t)$,

δ) $y'''(t) - y(t) = t^3 - 1$.

Άσκηση 5.2. Βρείτε τη γενική λύση $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ του ακόλουθου προβλήματος:

$$y''(t) + y(t) = f(x) + e^{2\,t}\,(t^2 + 1) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

όπου $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Άσκηση 5.3. Να υπολογιστεί η γενική λύση $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$y''(t) + \lambda^2\, y(t) = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_\ell\, \sin(\ell\,\pi\, t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

όπου N θετικός ακέραιος, $\lambda > 0$ και $\lambda \notin \{\ell\,\pi :\ \ell = 1, \ldots, N\}$.

Άσκηση 5.4. Βρείτε τη λύση $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y''(t) + y(t) = f(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

όπου

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{όταν} \quad t \le \pi \\ \pi\, e^{\pi - t} & \text{όταν} \quad t > \pi \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον

α) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις f και y.

β) Εξετάστε αν υπάρχει λύση $y \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Βρείτε τη γενική λύση για $t \ge \pi$ και $t \le \pi$, και στη συνέχεια εξετάστε αν μπορουν να συνδεθούν σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Γ. Ζουράρης