Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

MEM-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2019
Φροντιστηριο Ασκησεων 6

Άσκηση 6.1. Βρείτε τη λύση $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ g(t) & 1 \end{pmatrix} y(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

όπου

$$g(t) := \begin{cases} 0, & \text{όταν} \quad t < 1 \\ -1, & \text{όταν} \quad t \geq 1 \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 6.2. Βρείτε τη λύση $y \in C^1((0, +\infty), \mathbb{R}^2)$ του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$t\, y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} y(t) \quad \forall\, t > 0, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Υπόδειξη. Πρόκειται για ένα ανάλογο των εξισώσεων Euler. Εφαρμόστε την αλλαγή μεταβλητής $t = e^\tau$.

Άσκηση 6.3. Βρείτε τη γενική λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 8\, e^{2t} \\ 6(t-3)e^{2t} \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ανάγοντάς το σε μια μη ομογενή, γραμμική, Σ.Δ.Ε. 2ης τάξης.

Άσκηση 6.4. Βρείτε τη λύση $y \in C^1((0, +\infty), \mathbb{R}^2)$ του ακόλουθου συστήματος:

$$t\, y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall\, t < 0.$$

Υπόδειξη. Πρόκειται για ένα ανάλογο των εξισώσεων Euler. Εφαρμόστε την αλλαγή μεταβλητής $t = -e^\tau$.

Άσκηση 6.5. Μετατρέψτε σε 1ης τάξης γραμμικό σύστημα ΣΔΕ, το ακόλουθο 2ης τάξης γραμμικό σύστημα ΣΔΕ:

$$y''(t) + A\, y'(t) + B\, y(t) = 0$$

όπου $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ γνωστοί πίνακες.

Γ. Ζουράρης