

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ,
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ,
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Άσκηση 7.1. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t, x) + x u_x(t, x) = (x + t) u(t, x) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1] \cup [2, 3],$$

$$u(0, x) = \phi(x) \quad \forall x \in [0, 1] \cup [2, 3],$$

όπου ϕ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Άσκηση 7.2. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t, x) + u_x(t, x) = 4 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$u(0, x) = \sin(x) \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Άσκηση 7.3. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t, x) + \frac{t}{x} u_x(t, x) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x > 0,$$

$$u(0, x) = g(x) \quad \forall x > 0.$$

Άσκηση 7.4. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t, x) + x u_x(t, x) = x u(t, x) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 7.5. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t, x) + \sqrt{x} u_x(t, x) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x > 0,$$

$$u(0, x) = \phi(x) \quad \forall x > 0.$$

Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της u ;

Άσκηση 7.6. Έστω ότι δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_t(t, x) + a(t, x) u_x(t, x) = f(t, x) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

και ότι υπάρχει $x^* \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a(t, x^*) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Βρείτε την τιμή $u(t, x^*)$ για κάθε $t \geq 0$.

Υπόδειξη. Θέστε $x = x^*$ στη διαφορική εξίσωση.

Άσκηση 7.7. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x(1 - x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

α) Βρείτε τη σειρά Fourier της f επεκτείνοντας την f στο $[-1, 1]$ ώστε να είναι μια περιττή συνάρτηση.

β) Βρείτε τη σειρά Fourier της f επεκτείνοντας την f στο $[-1, 1]$ ώστε να είναι μια άρτια συνάρτηση.

γ) Βρείτε τη σειρά Fourier της f επεκτείνοντας την f στο $[-1, 1]$ με τιμή μηδέν, δηλ. $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [-1, 0)$.

Άσκηση 7.8. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

α) Βρείτε τη σειρά Fourier της f επεκτείνοντας την f στο $[-1, 1]$ ώστε να είναι μια περιττή συνάρτηση στο $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Ποιά είναι η τιμή της σειράς Fourier όταν $x = 0$;

β) Βρείτε τη σειρά Fourier της f επεκτείνοντας την f στο $[-1, 1]$ ώστε να είναι μια άρτια συνάρτηση.

γ) Βρείτε τη σειρά Fourier της f επεκτείνοντας την f στο $[-1, 1]$ με τιμή μηδέν, δηλ. $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [-1, 0)$.

Γ. Ζουράρης