

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ,
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ,
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Άσκηση 8.1. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= t^2 \sin(x) \quad \forall t > 0, \quad x \in (0, \pi), \\u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \quad \forall t > 0, \\u(0, x) &= \sin(2x) \quad \forall x \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Άσκηση 8.2. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= 2 \sin(x) \cos(x) \quad \forall t > 0, \quad x \in (0, \pi), \\u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \quad \forall t > 0, \\u(0, x) &= \sin(x) + \sin(3x) \quad \forall x \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Άσκηση 8.3. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= -u \quad \forall t > 0, \quad x \in (0, \pi), \\u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \quad \forall t > 0, \\u(0, x) &= \sin(x) \quad \forall x \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Επιπλέον, δείξτε, με τη μέθοδο της ενέργειας, ότι η λύση είναι μοναδική.

Άσκηση 8.4. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t &= c^2 u_{xx} + \frac{t^2}{2} \cos(x) \quad \forall t > 0, \quad x \in (0, \pi) \\u_x(t, 0) &= u_x(t, \pi) = 0 \quad \forall t > 0, \\u(0, x) &= \cos(x) \quad \forall x \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Άσκηση 8.5. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t &= 2 u_{xx} \quad \forall t > 0, \quad x \in (0, \pi) \\u_x(t, 0) &= u_x(t, \pi) = 0 \quad \forall t > 0, \\u(0, x) &= x^2 (\pi - x)^2 \quad \forall x \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Άσκηση 8.6. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + t \frac{\pi - x}{\pi} \quad \forall t > 0, \quad x \in (0, \pi) \\u_x(t, 0) &= u_x(t, \pi) = 0 \quad \forall t > 0, \\u(0, x) &= 1 \quad \forall x \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Άσκηση 8.7. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + \cos^2(x) \quad \forall t > 0, \quad x \in (0, \pi), \\u_x(t, 0) &= 0, \quad u_x(t, \pi) = t \quad \forall t > 0, \\u(0, x) &= \frac{1}{2} \cos(2x) \quad \forall x \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Υπόδειξη. Για δοθέν $t \geq 0$, βρείτε πολωνυμική συνάρτηση $p = p(x)$ η οποία να είναι τρίτου βαθμού και τέτοια ώστε: $p'(0) = 0$ και $p'(\pi) = t$. (Φυσικά οι συντελεστές του p θα εξαρτώνται από τη μεταβλητή t .)

Γ. Ζουράρης