

**Άσκηση 1 [1.5].** Έστω  $u = u(t, x) : [0, +\infty) \times \mathbb{R}$  η λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} u_t(t, x) + x u_x(t, x) &= 0 \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

α) Βρείτε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της εξίσωσης.

β) Βρείτε τύπο για την τιμή  $u(t, x)$  και υπολογίστε την τιμή  $u(1, 1)$ .

**Άσκηση 2 [1.5].** Χρησιμοποιώντας τον τύπο D' Alembert βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 1 & \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) &= 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= e^{-|x|} & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Άσκηση 3 [2.0].** Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & \forall t > 0, \quad \forall x \in (0, \pi), \\ u_x(t, 0) &= u_x(t, \pi) = 0 & \forall t > 0, \\ u(0, x) &= 1 + \cos(3x) & \forall x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

α) Δείξτε ότι η  $u$  μπορεί να γραφεί ως σειρά Fourier συνημιτόνων η οποία συγκλίνει κατά σημείο στο  $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ .

β) Βρείτε τις ΣΔΕ οι οποίες ικανοποιούνται από τους συντελεστές Fourier συνημιτόνων της  $u$  και βρείτε τις αντίστοιχες λύσεις τους.

γ) Ποιά είναι η λύση  $u$ ;

**Άσκηση 4 [1.5].** Έστω το ακόλουθο γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} p'(t) &= -q(t), \\ q'(t) &= p(t), \end{aligned} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

α) Βρείτε τη γενική λύση του παραπάνω συστήματος.

β) Βρείτε την ειδική λύση του παραπάνω συστήματος που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $p(0) = \varepsilon$  και  $q(0) = \frac{1}{2}$ .

γ) Έστω συνάρτηση  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $H(t) := p^2(t) + q^2(t)$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι η συνάρτηση  $H$  είναι σταθερή και προσδιορίστε την σταθερή αυτή τιμή.

**Άσκηση 5 [1.5].** Βρείτε τη λύση  $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) &= e^t(1 + 2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

**Άσκηση 6 [2.0].** Έστω η ακόλουθη συνήθης διαφορική εξίσωση:

$$2(3 - t^2 y(t)) y'(t) - 2t y^2(t) - 4 = 0.$$

α) Εξετάστε αν η ΣΔΕ είναι πλήρης και βρείτε τη γενική λύση της σε πεπλεγμένη μορφή.

β) Βρείτε ποιά λύση της ΣΔΕ ικανοποιεί την αρχική τιμή  $y(-1) = 8$  και προσδιορίστε το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα  $I \subset \mathbb{R}$  στο οποίο ορίζεται.

### Επισημάνσεις.

- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης δεν επιτρέπεται η έξοδος από την αίθουσα και η επιστροφή σαυτήν.
- Δεν επιτρέπεται να έχετε μαζί σας κινητά και προσωπικές σημειώσεις. Τσάντες, σημειώσεις και κινητά συγκεντρώνονται σε σημείο της αίθουσας εξέτασης.
- Αν δεν επιτρέπεται η συμμετοχή σας στην εξέταση του μαθήματος (π.χ. αν δεν έχετε εγγραφεί στο μάθημα, ή έχετε διαγραφεί από το Τμήμα), τότε το γραπτό σας δεν θα βαθμολογηθεί και ίσως σας επιβληθούν κυρώσεις.
- Ισχύει η από 26-9-2018 απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος για την αντιμετώπιση των φαινομένων αντιγραφής.