

Ομάδα Θεμάτων 1

Άσκηση 1.1 (2 Μ). Δίνεται η συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x(1 - x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.
α) Γράψτε τη συνάρτηση g ως σειρά Fourier ημιτόνων.

β) Γράψτε τη συνάρτηση g ως σειρά Fourier συνημιτόνων.

Άσκηση 1.2 (1.5 Μ). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{1}{4} u_{xx} + 2x(1 - x) & \forall t > 0, \quad \forall x \in (0, 1), \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0 & \forall t > 0, \\ u_t(0, x) &= 0 & \forall x \in [0, 1], \\ u(0, x) &= 0 & \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Άσκηση 1.3 (2 Μ). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx} - \frac{1}{2}u - x(1 - x) & \forall t > 0, \quad \forall x \in (0, 1), \\ u_x(t, 0) &= u_x(t, 1) = 0 & \forall t > 0, \\ u(0, x) &= 0 & \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ομάδα Θεμάτων 2

Άσκηση 2.1 (1.5 Μ). Βρείτε το μέγιστο δυνατό διάστημα I και αντίστοιχη συνάρτηση $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε: $0 \in I$ και

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t)(1 - y(t)) \quad \forall t \in I, \\ y(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.2 (1.5 Μ). Βρείτε τη λύση $y \in C^2((0, +\infty), \mathbb{R})$ του ακόλουθου προβλήματος:

$$\begin{aligned} y''(t) - y(t) &= \ln(t) \quad \forall t > 0, \\ y(1) &= 0, \quad y'(1) = 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.3 (1.5 Μ). Βρείτε το μέγιστο δυνατό διάστημα I και αντίστοιχη συνάρτηση $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε: $e \in I$ και

$$\begin{aligned} 1 + \frac{y(t)}{t} + \ln(t)y'(t) &= 0 \quad \forall t \in I, \\ y(e) &= 1. \end{aligned}$$

Επισημάνσεις.

- Για να περάσετε το μάθημα πρέπει να συγκεντρώσετε 5 μονάδες και να απαντήσετε σωστά σε ένα τουλάχιστον θέμα της «Ομάδας Θεμάτων 1» και σε ένα τουλάχιστον θέμα της «Ομάδας Θεμάτων 2».
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης δεν επιτρέπεται η έξοδος από την αίθουσα και η επιστροφή σαυτήν.
- Δεν επιτρέπεται να έχετε μαζί σας κινητά και προσωπικές σημειώσεις. Τσάντες, σημειώσεις και κινητά συγκεντρώνονται σε σημείο της αίθουσας εξέτασης.
- Αν δεν επιτρέπεται η συμμετοχή σας στην εξέταση του μαθήματος (π.χ. αν δεν έχετε εγγραφεί στο μάθημα, ή έχετε διαγραφεί από το Τμήμα), τότε το γραπτό σας δεν θα βαθμολογηθεί και ίσως σας επιβληθούν κυρώσεις.
- Ισχύει η από 26-9-2018 απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος για την αντιμετώπιση των φαινομένων αντιγραφής.

Γ. Ζουράρης