Αριθμητικη Λυση Διαφορικων Εξισωσεων
Εαρινο Εξαμηνο 2020
Φυλλαδιο Ασκησεων 1

Άσκηση 1.1 : Έστω a, $b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $v \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ για την οποία ισχύει ότι $\int_a^b v(x)\,dx = 0$, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\left(\int_a^b |v(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \tfrac{b-a}{\sqrt{2}}\,\left(\int_a^b |v'(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Άσκηση 1.2 : Έστω a, $b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\,u''(x) + \mu\,u(x) &= f(x) \quad \forall\,x \in [a,b],\\ u(a) = u(b) &= 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a,b]$ και $\mu \in \mathbb{R}$ μία σταθερά. Βρείτε πως επηρεάζεται η ύπαρξη μοναδικής λύσης του προβλήματος από την τιμή της σταθεράς μ.
Υπόδειξη: Αναζητείστε τη λύση του προβλήματος σε μορφή κατάλληλης σειράς Fourier.

Άσκηση 1.3 : Έστω a, $b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\,(p\,u')' + q\,u &= f \quad \text{στο } [a,b],\\ u(a) = u(b) &= 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C[a,b]$, $q \in C[a,b]$ με $q \geq 0$, και $p \in C^1[a,b]$ με $\min_{[a,b]} p > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται από τα a, b, και τις συναρτήσεις p και q, τέτοια ώστε:

$$\int_a^b \left(\,|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u''(x)|^2\,\right)\,dx \leq C\,\int_a^b |f(x)|^2\,dx.$$

Άσκηση 1.4 : Έστω a, $b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\,(p\,u')' + q\,u &= f \quad \text{στο } [a,b],\\ p(a)\,u'(a) &= \gamma_1\,u(a),\\ p(b)\,u'(b) &= -\gamma_2\,u(b), \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $f \in C[a,b]$, $q \in C[a,b]$ με $q \geq 0$, $p \in C^1[a,b]$ με $\min_{[a,b]} p > 0$, και γ_1, γ_2 μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί με $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$.

α) Δείξτε ότι το πρόβλημα (1) έχει μοναδική λύση.

β) Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται από τα a, b, p και q, τέτοια ώστε:

$$\int_a^b \left(\,|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u''(x)|^2\,\right)\,dx \leq C\,\int_a^b |f(x)|^2\,dx.$$

Άσκηση 1.5 : Έστω a, $b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\,(p\,u')' + g\,u' + q\,u &= f \quad \text{στο } [a,b],\\ u(a) = u(b) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b]$, και $p \in C^1[a,b]$ με $\inf_{[a,b]} p > 0$. Δείξτε ότι το πρόβλημα (2) έχει μοναδική λύση στις ακόλουθες περιπτώσεις: α) $2\,q(x) - g'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, και β) $\frac{g^2(x)}{4p(x)} + q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη: *Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με* u *και ολοκληρώστε στο* $[a,b]$. *α) Ολοκληρώστε κατά μέρη στον όρο* $\int_a^b g(x)\,u'(x)\,u(x)\,dx$. *β) Εφαρμόστε τη μέθοδο ενέργειας και χρησιμοποιείστε κατάλληλα την ανισότητα* Cauchy-Schwarz.

Γ. Ζουράρης