Lesson 1.

ΔΕΥΤΕΡΑ 30/3/2020

zoom meeting

20.00-22.00.

Πηγή: Γ. Ακρίβης & Β. Δουγαλής

Αριθμητικές Μέθοδοι για ΣΔΕ

Β΄ έκδοση

σελ. 376-384

Κεφ. 7.3. Εκ των υστέρων

εκτιμήσεις του σφάλματος

Γ. Ζουράρης.

A posteriori εκτιμήσεις σφάλματος για τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

Πρόβλημα. Έστω $u \in C^2([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ η λύση του προβλήματος δύο σημείων:

$$-u'' + qu = f \quad \text{στο } [\alpha,\beta]$$
$$u(\alpha) = u(\beta) = 0$$

όπου: $q \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ με: $q \geq 0$ and $f \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$.

Χώρος πεπερασμένων στοιχείων

$J \in \mathbb{N}$, $(x_j)_{j=0}^{J}$ με: $x_0=\alpha$, $x_J=\beta$, $x_j < x_{j+1}$ για $j=0,\dots,J-1$, $\Delta x = \max_{0\leq j\leq J-1}(x_{j+1}-x_j)$.

$$H := \left\{ g \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R}) : \ g\big|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}^1[x_j,x_{j+1}] \text{ για } j=0,\dots,J-1, \ g(\alpha)=g(\beta)=0 \right\}$$

Ο H είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με $\dim(H) = J-1$. Επίσης: $H \subset X := \{ w \in C_p^1([\alpha,\beta];\mathbb{R}) : w(\alpha)=w(\beta)=0 \}$

Διατύπωση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων:

Βρές $u_H \in H$ τ.ω.

$$\int_\alpha^\beta u_H'(x)\cdot \varphi'(x)\,dx + \int_\alpha^\beta q(x)\,u_H(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H.$$

Εισάγοντας τη διγραμμική μορφή: $\mathcal{B} : X \times X \to \mathbb{R}$

με: $$\mathcal{B}(v,w) := \int_\alpha^\beta v'(x)\,w'(x)\,dx + \int_\alpha^\beta q(x)\,v(x)\,w(x)\,dx \quad \forall v,w \in X$$

και το $L^2(\alpha,\beta)$- εσωτερικό γινόμενο:

$$(v,w) := \int_\alpha^\beta v(x)\,w(x)\,dx \quad \forall v,w \in L^2([\alpha,\beta];\mathbb{R})$$

Η διατύπωση της μεθόδου παίρνει την ακόλουθη πιο "συμπαγή" μορφή: βρές $u_H \in H$ τ.ω.

$$\mathcal{B}(u_H,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

Έχουμε ήδη δείξει ότι:

$$|\mathcal{B}(v,w)| \leq \max\{1, \max_{[\alpha,\beta]}|q|\}\ \|v\|_1\,\|w\|_1 \quad \forall v,w \in X$$

και

$$\mathcal{B}(v,v) \geq \frac{1}{2}\min\{1, C_{PF}^2\}\,\|v\|_1^2 \quad \forall v \in X,$$

όπου C_{PF} είναι η σταθερά της ανισότητας Poincaré-Friedrichs δηλ.

$$\|v\| \leq C_{PF}\,\|v'\| \quad \forall v \in X.$$

Θυμίζουμε ότι:

$$\|v\| = \left(\int_\alpha^\beta v^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

$$\|v\|_1 = \left[\int_\alpha^\beta v^2(x)\,dx + \int_\alpha^\beta (v'(x))^2\,dx\right]^{1/2}.$$

A priori εκτιμήσεις σφάλματος:

Έχουμε δείξει ότι:

$$\|u' - u_H'\| \leq c_1\,\Delta x\,\|u''\|$$

$$\|u - u_H\| \leq c_2\,\Delta x^2\,\|u''\|$$

όπου: c_1, c_2 θετικές σταθερές που δεν εξαρτώνται από τη διαμέριση του $[\alpha,\beta]$.

A posteriori εκτιμήσεις:

Ο στόχος είναι να εκτιμήσουμε το σφάλμα από μία ποσότητα που εξαρτάται από το u_H και δεν εξαρτάται από την άγνωστη ακριβή λύση: u. δηλ.

$$(E1) \qquad \|u'-u_H'\| \le F_1(u_H)$$

$$(E2) \qquad \|u-u_H\| \le F_2(u_H)$$

Ας ξεκινήσουμε με την εκτίμηση (E1).

Έστω: $e_H := u-u_H$. Επειδή $e_H \in X$ έχουμε ότι:

$$\mathcal{B}(e_H,e_H) = \int_\alpha^b e_H' e_H' \, dx + \int_\alpha^b q\, e_H\, e_H \, dx$$

$$= \int_\alpha^b (e_H')^2 dx + \int_\alpha^b q\, e_H^2 \, dx$$

$$\underset{q\ge 0}{\ge} \int_\alpha^b (e_H')^2 dx = \|e_H'\|^2$$

δηλ.

$$\|e_H'\|^2 \le \mathcal{B}(e_H,e_H).$$

Θυμίζουμε ότι ισχύει: $\mathcal{B}(e_H,\varphi)=0 \quad \forall \varphi\in H$, που είναι γνωστή ως "Galerkin orthogonality".

Έτσι, για κάθε $\varphi\in H$, έχουμε:

$$\mathcal{B}(e_H,e_H) = \mathcal{B}(e_H,e_H-\varphi)$$

$$= \int_\alpha^b e_H' (e_H-\varphi)' \, dx + \int_\alpha^b q\, e_H (e_H-\varphi)\, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} e_H' (e_H-\varphi)' \, dx + \int_\alpha^b q\, e_H (e_H-\varphi)\, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ e_H'(e_H-\varphi)\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} e_H'' (e_H-\varphi)\, dx \right\} + \int_\alpha^b q\, e_H (e_H-\varphi)\, dx$$

Για να "εξαφανίσουμε" τους "συνοριακούς όρους", επιλέγουμε: $\varphi=\varphi^* = I_H e_H$, όπου I_H είναι ο interpolant στον H, δηλ. για κάθε $v\in C([\alpha,b];\mathbb{R})$ το $I_H v$ είναι το μοναδικό στοιχείο του H με την ιδιότητα: $I_H v(x_j)=v(x_j)$ για $j=0,\dots,J$.

Έτσι:

$$\mathcal{B}(e_H,e_H) = -\sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} e_H'' (e_H-\varphi^*)\, dx + \int_\alpha^b q\, e_H (e_H-\varphi^*)\, dx$$

$$= -\sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (u'' - u_H'')(e_H - \varphi^*)\,dx + \int_\alpha^b q\, e_H\, (e_H - \varphi^*)\,dx$$

$$\overset{u_H''=0}{=} -\sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u''\, (e_H - \varphi^*)\,dx + \int_\alpha^b q\, e_H\, (e_H - \varphi^*)\,dx$$

$$= -\int_\alpha^b u''\, (e_H - \varphi^*)\,dx + \int_\alpha^b q\, (u - u_H)(e_H - \varphi^*)\,dx$$

$$= \int_\alpha^b [-u'' + qu]\,(e_H - \varphi^*)\,dx - \int_\alpha^b q\, u_H\, (e_H - \varphi^*)\,dx$$

$$= \int_\alpha^b f(x)\,(e_H - \varphi^*)\,dx - \int_\alpha^b q\, u_H\, (e_H - \varphi^*)\,dx$$

$$= \int_\alpha^b (f - q u_H)(e_H - \varphi^*)\,dx$$

Συνοψίζοντας:

$$\mathcal{B}(e_H, e_H) = \int_\alpha^b r_H\, (e_H - \varphi^*)\,dx$$

όπου: $r_H = f - q u_H + u_H'' = f - q u_H$ που είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως "residual function" της μεθόδου.

Μένει να εκτιμήσουμε κατάλληλα τη διαφορά $e_H - \varphi^* = e_H - I_H e_H$ επειδή το e_H εξαρτάται από την ακριβή λύση u του προβλήματος.

Πρώτα παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{B}(e_H, e_H) = \int_\alpha^b r_H\, (e_H - \varphi^*)\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} r_H\, (e_H - \varphi^*)\,dx$$

$$\leq \sum_{j=0}^{J-1} \|r_H\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}\, \|e_H - \varphi^*\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}$$

όπου: $\|v\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} = \left[\int_{x_j}^{x_{j+1}} v^2\,dx\right]^{1/2}$ για κάθε $v \in L^2(x_j, x_{j+1})$.

Επειδή: $e_H - \varphi^* \in C^1[x_j, x_{j+1}]$ και $(e_H - \varphi^*)(x_j) = (e_H - \varphi^*)(x_{j+1}) = 0$, εφαρμόζοντας την ανισότητα Poincaré–Friedrich έχουμε:

$$\|e_H - \varphi^*\|^2_{L^2(x_j, x_{j+1})} \leq \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2}\, \|(e_H - \varphi^*)'\|^2_{L^2(x_j, x_{j+1})}$$

Επομένως

$$\mathcal{B}(e_H, e_H) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{J-1} \|r_H\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}\, (x_{j+1} - x_j)\, \|(e_H - \varphi^*)'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}$$

Ας δούμε τον όρο: $\|(e_H-\varphi^*)'\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})}$. Έχουμε τα ακόλουθα:

$$\|(e_H-\varphi^*)'\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (e_H-\varphi^*)'(e_H'-\varphi^{*\prime})\,dx$$

$$= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (e_H-\varphi^*)' e_H'\,dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} (e_H-\varphi^*)'\varphi^{*\prime}\,dx$$

$$= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (e_H-\varphi^*)' e_H'\,dx - \underbrace{\varphi^{*\prime}}_{\text{σταθ.}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (e_H-\varphi^*)'\,dx$$

$$= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (e_H-\varphi^*)' e_H'\,dx - \varphi^{*\prime}\underbrace{\left[(e_H-\varphi^*)\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \right]}_{=0}$$

$$= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (e_H-\varphi^*)' e_H'\,dx$$

$$\leq \|(e_H-\varphi^*)'\|_{L^2(x_j,x_{j+1})} \|e_H'\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}.$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\|(e_H-\varphi^*)'\|_{L^2(x_j,x_{j+1})} \leq \|e_H'\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}.$$

Μαζεύουμε τις εκτιμήσεις που έχουμε κάνει ως εξής:

$$\|e_H'\|^2 \leq B(e_H,e_H)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{J-1} \|r_H\|_{L^2(x_j,x_{j+1})} (x_{j+1}-x_j) \|e_H'\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}$$

$$\overset{C-S}{\leq} \left[\sum_{j=0}^{J-1} \|r_H\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})} \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2} \right]^{1/2} \left[\sum_{j=0}^{J-1} \|e_H'\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})} \right]^{1/2}$$

$$\leq \|e_H'\| \left[\sum_{j=0}^{J-1} \|r_H\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})} \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2} \right]^{1/2}$$

που μας δίνει:

$$\|e_H'\| \leq \left[\sum_{j=0}^{J-1} \underbrace{\frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2} \|r_H\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})}} \right]^{1/2}$$

αυτή η ποσότητα μπορεί να θεωρηθεί ως το "σφάλμα" της μεθόδου στο διάστημα (x_j,x_{j+1}).

* Σημ. Η σταθερά $\frac{1}{2}$ μπορεί να βελτιωθεί σε $\frac{1}{8}$ και σχετίζεται με την ανισότητα Poincaré-Friedrichs. *

Ας δούμε πως μπορούμε να εκτιμήσουμε a posteriori το σφάλμα $\|e_H\|$. Όπως στην περίπτωση της a priori εκτίμησης θα στηριχθούμε στο "τέχνασμα του Nitsche".

Έστω $w \in C^2([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ η λύση του ακόλουθου προβλήματος δύο σημείων:

$$-w'' + q\,w = e_H \quad \text{στο } [\alpha,\beta],$$
$$w(\alpha) = w(\beta) = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με w και ολοκληρώνουμε στο $[\alpha,\beta]$. Έτσι:

$$\int_\alpha^\beta (w')^2 dx + \int_\alpha^\beta q\,w^2\,dx = (e_H, w)$$

$$\Rightarrow \quad \|w'\|^2 \leq \|e_H\| \cdot \|w\|$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα P-F έπεται:

$$\|w\| \leq \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{2}} \|w'\|$$

και επομένως:

$$\|w\|^2 \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \|w'\|^2 \leq \|w\|\,\|e_H\| \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

Έτσι:

$$\|w\| \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \|e_H\|.$$

Επίσης, από τη διαφορική εξίσωση έπεται:

$$\|w''\| \leq \max_{[\alpha,\beta]} |q|\, \|w\| + \|e_H\|$$
$$\leq \max_{[\alpha,\beta]} |q| \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \|e_H\| + \|e_H\|$$
$$\leq \|e_H\| \underbrace{\left\{ 1 + \max_{[\alpha,\beta]} |q| \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \right\}}_{\hat{C}}.$$

Δηλ. $\|w''\| \leq \hat{C}\, \|e_H\|$.

Πολ/ζοντας τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με e_H και ολοκληρώνοντας στο $[\alpha,\beta]$ έπεται:

$$-\int_\alpha^\beta w'' e_H\,dx + \int_\alpha^\beta q\,w\,e_H = \|e_H\|^2$$

$$\Rightarrow \|e_H\|^2 = \int_\alpha^\beta q\,e_H w\,dx + \int_\alpha^\beta e_H' w'\,dx$$

$$\Rightarrow \|e_H\|^2 = \mathcal{B}(e_H, w).$$

$$\overset{\text{G-orth.}}{\Rightarrow} \quad \|e_H\|^2 = \mathcal{B}(e_H, w - I_H w)$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} e_H' (w-I_Hw)'\,dx + \int_a^b q\, e_H (w-I_Hw)\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ \underbrace{e_H'(w-I_Hw)\Big|_{x_j}^{x_{j+1}}}_{=0} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} e_H''(w-I_Hw)\,dx \right\} + \int_a^b q\, e_H(w-I_Hw)\,dx$$

$$= -\sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (u''-u_H'')(w-I_Hw)\,dx + \int_a^b q(u-u_H)(w-I_Hw)\,dx$$

$$= -\sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u''(w-I_Hw)\,dx + \int_a^b q(u-u_H)(w-I_Hw)\,dx$$

$$= \int_a^b (-u''+qu-qu_H)(w-I_Hw)\,dx$$

$$= \int_a^b r_H\,(w-I_Hw)\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} r_H\,(w-I_Hw)\,dx$$

$$\le \sum_{j=0}^{J-1} \|r_H\|_{L^2(x_j,x_{j+1})} \|w-I_Hw\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}$$

Έτσι:

$$\|e_H\|^2 \le \sum_{j=0}^{J-1} \|r_H\|_{L^2(x_j,x_{j+1})} \|w-I_Hw\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}$$

$$\le \sum_{j=0}^{J-1} \|r_H\|_{L^2(x_j,x_{j+1})} \frac{(x_{j+1}-x_j)}{\sqrt{2}} \|(w-I_Hw)'\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}$$

Ας εκτιμήσουμε την ποσότητα $\|(w-I_Hw)'\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}$.

Έστω: $z = w - I_Hw$. Επειδή $z \in C^1([x_j,x_{j+1}];\mathbb{R})$ και $z(x_j) = z(x_{j+1}) = 0$, από το Θ. Rolle έπεται ότι υπάρχει: $\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$ τ.ω. $z'(\xi_j) = 0$. Έτσι:

$$z'(x) = \int_{\xi_j}^{x} z''(s)\,ds = \int_{\xi_j}^{x} w''(s)\,ds \quad \forall x \in [\xi_j, x_{j+1}]$$

$$z'(x) = -\int_{x}^{\xi_j} z''(s)\,ds = -\int_{x}^{\xi_j} w''(s)\,ds \quad \forall x \in [x_j, \xi_j]$$

Άρα

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (z'(x))^2 dx = \int_{x_j}^{\xi_j} (z'(x))^2 dx + \int_{\xi_j}^{x_{j+1}} (z'(x))^2 dx$$

$$= \int_{x_j}^{\xi_j} \left(\int_x^{\xi_j} w''(s)\,ds\right)^2 dx + \int_{\xi_j}^{x_{j+1}} \left(\int_{\xi_j}^{x} w''(s)\,ds\right)^2 dx$$

$$\le \int_{x_j}^{\xi_j} \left(\int_x^{\xi_j} |w''(s)|\,ds\right)^2 dx + \int_{\xi_j}^{x_{j+1}} \left(\int_{\xi_j}^{x} |w''(s)|\,ds\right)^2 dx$$

$$\le \int_{x_j}^{\xi_j} (\xi_j - x)\left(\int_x^{\xi_j} |w''(s)|^2 ds\right) dx + \int_{\xi_j}^{x_{j+1}} (x-\xi_j)\left(\int_{\xi_j}^{x} |w''(s)|^2 ds\right) dx$$

$$\le \int_{x_j}^{\xi_j} (w'')^2 ds \cdot \frac{(\xi_j - x_j)^2}{2} + \int_{\xi_j}^{x_{j+1}} (w'')^2 ds \cdot \frac{(x_{j+1}-\xi_j)^2}{2}$$

$$\le \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} (w''(s))^2 ds\right)$$

Δηλ. $\|z'\|_{L^2(x_j,x_{j+1})} \le \frac{(x_{j+1}-x_j)}{\sqrt{2}} \|w''\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}$

Έτσι:

$$\|e_H\|^2 \le \sum_{j=0}^{J-1} \|v_H\|_{L^2(x_j,x_{j+1})} \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2} \|w''\|_{L^2(x_j,x_{j+1})}$$

$$\le \left[\sum_{j=0}^{J-1} \|v_H\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})} \frac{(x_{j+1}-x_j)^4}{4}\right]^{1/2} \left[\sum_{j=0}^{J-1} \|w''\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})}\right]^{1/2}$$

$$\le \|w''\| \left[\sum_{j=0}^{J-1} \|v_H\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})} \frac{(x_{j+1}-x_j)^4}{4}\right]^{1/2}$$

$$\le \hat{C} \cdot \|e_H\| \left[\sum_{j=0}^{J-1} \frac{(x_{j+1}-x_j)^4}{4} \|v_H\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})}\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \|e_H\| \le \hat{C} \left[\sum_{j=0}^{J-1} \underbrace{\frac{(x_{j+1}-x_j)^4}{4} \|v_H\|^2_{L^2(x_j,x_{j+1})}}_{\text{μπορεί να θεωρηθεί ως το σφάλμα στο διάστημα } (x_j,x_{j+1})}\right]^{1/2}$$

* Σημ: Η σταθερά $1/4$ και $\hat{C}$ μπορούν να βελτιωθούν μέσω μικρότερης σταθεράς στην Poincaré-Friedrichs #.

Παρατήρηση:

Στα πλαίσια του μαθήματος δείξαμε ότι:

$$\|v\| \le \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|v'\| \quad \forall v \in X.$$

αλλά στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι $v(a)=0$. Αν χρησιμοποιήσουμε ότι: $v(a)=v(b)=0$, τότε η ανισότητα παίρνει τη μορφή:

$$\|v\| \le \frac{(b-a)}{2\sqrt{2}} \|v'\| \quad \forall v \in X$$