Αριθμητική Λύση ΜΔΕ

12/5/2020

10η εξ αποστάσεως διάλεξη

5μμ.-7μμ

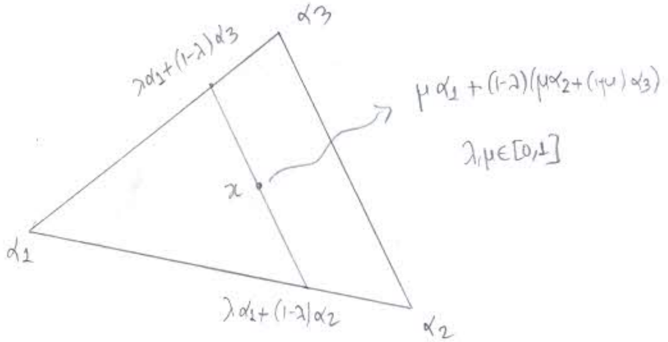
(zoom meeting)

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ P^1

$$P^1 = \text{span}\left\{ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} : \begin{array}{c} 0 \le \alpha_1+\alpha_2 \le 1 \\ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{N}_0 \end{array}\right\} = \text{span}\left\{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} : (\alpha_1,\alpha_2)\in\{(0,0),(1,0),(0,1)\}\right\}$$
$$= \text{span}\{1,x_1,x_2\}$$

χώρος των γραμμικών πολυωνύμων στο $\mathbb{R}^2$

$\dim(P^1)=3$.



<u>Πρόταση:</u> Τα $\{1,x_1,x_2\}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες συναρτήσεις του $P^1(\tau)$

<u>Απ.</u> Έστω $(\rho_i)_{i=1}^3 \subset\mathbb{R}$ τ.ω $\rho_1+\rho_2x_1+\rho_3x_2=0 \ \forall x\in\tau$

Άρα $\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_1+\rho_2x_1+\rho_3x_2)=0 \quad \forall x\in\mathring{\tau} \Rightarrow \rho_2=0$

$\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho_1+\rho_2x_1+\rho_3x_2)=0 \quad \forall x\in\mathring{\tau} \Rightarrow \rho_3=0$.

Έτσι $\rho_1=0$. ∎

Κάθε στοιχείο x του τριγώνου τ με κορυφές $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ γράφεται ως εξής

$$x = \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3 \qquad \begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\ 0\le\lambda_i\le1 \quad i=1,2,3\end{array}$$

δηλ. ως κυρτός συνδυασμός των κορυφών του.

Ας συμβολίσουμε με $P^1(\tau)$ τις συναρτήσεις P^1 περιορισμένες στο τ, δηλ.

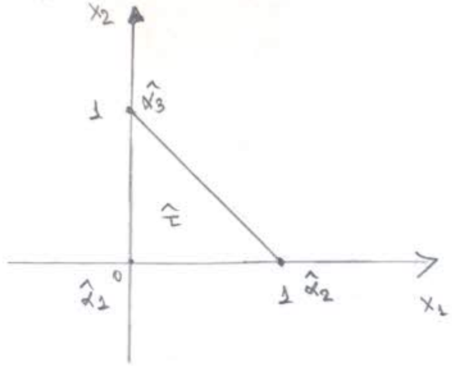
$P^1(\tau) := \{p:\tau\to\mathbb{R} : \exists\, b_0,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ τ.ω $p(x)=b_0+b_1x_1+b_2x_2 \ \forall x\in\mathbb{R}^2\}$. Επιπλέον

συμβολίζουμε με $K=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ το σύνολο των κορυφών του τριγώνου τ.

Μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε μία βάση Lagrange $B=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ του $P^1(\tau)$, δηλ. να βρούμε συναρτήσεις $(\varphi_j)_{j=1}^3$ της $P^1(\tau)$ τ.ω

$$\varphi_j(\alpha_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{όταν } j=i\\ 0 & \text{όταν } j\ne i\end{cases}, \quad 1\le i,j\le 3.$$

Η ιδέα είναι να γίνει αυτή η διαδικασία σε ένα συγκεκριμένο τρίγωνο $\hat{\tau}$ το οποίο καλείται "τρίγωνο αναφοράς".



Ο τρίγωνο αναφοράς $\hat\tau$ συνήθως επιλέγεται το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές $\hat\alpha_1=(0,0)$, $\hat\alpha_2=(1,0)$, $\hat\alpha_3=(0,1)$. Ας βρούμε την αντίστοιχη βάση Lagrange δηλ. συναρτήσεις $(\hat\varphi_j)_{j=1}^{3}$ του $P^1(\hat\tau)$ τ.ω $\hat\varphi_j(\hat\alpha_k)=\delta_{jk}$, $1\le j,k\le 3$.

Έστω: $\hat\varphi_j(x) = \hat b_0^j + \hat b_1^j x_1 + \hat b_2^j x_2 \quad \forall x\in\mathbb{R}^2$, $j=1,2,3$ Τότε έχουμε τα ακόλουθα:

- $\hat\varphi_1(\hat\alpha_1)=1, \hat\varphi_1(\hat\alpha_2)=0, \hat\varphi_1(\hat\alpha_3)=0 \iff \hat b_0^1=1, \hat b_0^1+\hat b_1^1=0, \hat b_0^1+\hat b_2^1=0 \iff \hat b_0^1=1, \hat b_1^1=-1, \hat b_2^1=-1$
- $\hat\varphi_2(\hat\alpha_1)=0, \hat\varphi_2(\hat\alpha_2)=1, \hat\varphi_2(\hat\alpha_3)=0 \iff \hat b_0^2=0, \hat b_0^2+\hat b_1^2=1, \hat b_0^2+\hat b_2^2=0 \iff \hat b_0^2=0, \hat b_1^2=1, \hat b_2^2=0$
- $\hat\varphi_3(\hat\alpha_1)=0, \hat\varphi_3(\hat\alpha_2)=0, \hat\varphi_3(\hat\alpha_3)=0 \iff \hat b_0^3=0, \hat b_0^3+\hat b_1^3=0, \hat b_0^3+\hat b_2^3=1 \iff \hat b_0^3=0, \hat b_1^3=0, \hat b_2^3=1$

Επομένως $\hat\varphi_1(x)=1-x_1-x_2$, $\hat\varphi_2(x)=x_1$, $\hat\varphi_3(x)=x_2$ είναι η Lagrange βάση του $P^1(\hat\tau)$.

Για να βρούμε τη Lagrange βάση του $P^1(\tau)$ η ιδέα είναι να κατασκευάσουμε μια αντιστρέψιμη affine απεικόνιση από το $\hat\tau$ στο τ.

(10.3.

Θέλουμε να βρούμε μία απεικόνιση $F: \hat{\tau} \to \tau$ με μορφή: $F(x) = Ax + b \ \forall x \in \hat{\tau}$, τ.ω. $F(\hat{\alpha}_j) = \alpha_j$ για $j = 1,2,3$. Προφανώς η απαίτηση $F(\hat{\alpha}_1) = \alpha_1$ ισοδυναμεί με: $b = \alpha_1$. Επιπλέον έχουμε:

$$\begin{matrix} F(\hat{\alpha}_2) = \alpha_2 \\ F(\hat{\alpha}_3) = \alpha_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} A\binom{1}{0} + b = \alpha_2 \\ A\binom{0}{1} + b = \alpha_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1 \\ \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \alpha_3 - \alpha_1 \end{matrix}$$

Άρα: $F(x) = \Big[\underbrace{\alpha_2 - \alpha_1}_{1^{\eta}\ \text{στήλη}} \Big| \underbrace{\alpha_3 - \alpha_1}_{2^{\eta}\ \text{στήλη}}\Big] x + \alpha_1 \ \forall x \in \hat{\tau}$.

Ο πίνακας $A = [\alpha_2 - \alpha_1 | \alpha_3 - \alpha_1]$ είναι αντιστρέψιμος διότι έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες.

(Αν οι στήλες $(\alpha_2 - \alpha_1), (\alpha_3 - \alpha_1)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε υπάρχουν $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ με: $|\mu_1| + |\mu_2| > 0$ τ.ω $\mu_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \mu_2(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$. Αν $\mu_1 = 0$ τότε $\mu_2 \neq 0$ και έπεται ότι $\alpha_3 = \alpha_1$, που δεν μπορεί να ισχύει καθώς οι κορυφές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους. Αν $\mu_2 = 0$ τότε $\mu_1 \neq 0$ και $\alpha_1 = \alpha_2$, που δεν μπορεί να συμβαίνει. Έτσι: $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$. Έστω ότι $\mu_1 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Τότε: $\alpha_2 - \alpha_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \Big(1 - \underbrace{\frac{\mu_2}{\mu_1}}_{\in[0,1]}\Big) + \underbrace{\frac{\mu_2}{\mu_1}}_{\in[0,1]} \alpha_2$, όπως το α_2 είναι κυρτός συνδυασμός των α_1, α_2 άρα είναι σημείο στην πλευρά με άκρα α_1, α_2. Αν $\mu_2 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$ τότε: $\alpha_3 = \alpha_1\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) + \frac{\mu_1}{\mu_2}\alpha_2$ όπως το α_3 είναι σημείο στην πλευρά με άκρα α_1, α_2. Και στις 2 περιπτώσεις δεν σχηματίζεται τρίγωνο)

Το επόμενο βήμα είναι να εξασφαλίσουμε ότι: $F(\hat{\tau})=\tau$.

Έστω $\hat{x}\in\hat{\tau}$. Τότε: $\hat{x}=\lambda_1\hat{\alpha}_1+\lambda_2\hat{\alpha}_2+\lambda_3\hat{\alpha}_3$ για κάποια $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in[0,1]$ με: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$,

Άρα: $$F(\hat{x})=A\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\hat{\alpha}_i\right)+b=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i A\hat{\alpha}_i+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i b$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(A\hat{\alpha}_i+b)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i F(\hat{\alpha}_i)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\alpha_i\in\tau.$$

Άρα $F(\hat{\tau})\subset\tau$. Έστω $x\in\tau$. Τότε $x=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\alpha_i$ για κάποια $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in[0,1]$ με $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$.

Επομένως: $x=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i F(\hat{\alpha}_i)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(A\hat{\alpha}_i+b)=A\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\hat{\alpha}_i\right)+b=F(\hat{x})$ όπου $\hat{x}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\hat{\alpha}_i$. Άρα

η F είναι επί του $\hat{\tau}$. Έτσι: $F(\hat{\tau})=\tau$. Μένει να εξασφαλίσουμε ότι η F είναι 1:1

Έστω: $\hat{x},\hat{y}\in\hat{\tau}$ τω $F(\hat{x})=F(\hat{y})$. Τότε: $A\hat{x}=A\hat{y}\Rightarrow A(\hat{x}-\hat{y})=0\underset{\text{ο A αντιστρέψιμος}}{\Longrightarrow}\hat{x}-\hat{y}=0\Rightarrow\hat{x}=\hat{y}$.

Έτσι η $F:\hat{\tau}\to\tau$ είναι αντιστρέψιμη και: $F^{-1}(x)=A^{-1}x-A^{-1}b\ \ \forall x\in\tau$.

Η Lagrange βάση $(\varphi_j)_{j=1}^{3}$ του $P^1(\tau)$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\varphi_j(x)=\hat{\varphi}_j(F^{-1}(x))\quad\forall x\in\tau,\ j=1,\dots,3}$$

<u>Σημ.</u> Επειδή η F^{-1} είναι γραμμική και $\hat{\varphi}_j\in P^1(\hat{\tau})$, έπεται $\varphi_j\in P^1(\tau)$.

(10.5

Ερ. Ισχύει ότι: $\varphi_j \in P^1(\tau)$?

Απ. ΝΑΙ. Η φ_j είναι σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων.

Έστω $x \in \mathbb{R}^2$. Τότε: $F^{-1}(x) = \begin{pmatrix} A^{-1}_{11}x_1 + A^{-1}_{12}x_2 - c_1 \\ A^{-1}_{21}x_1 + A^{-1}_{22}x_2 - c_2 \end{pmatrix}$ όπου $c = A^{-1}b$. Αν $\hat{\varphi}_j(x) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$

τότε: $\hat{\varphi}_j(F^{-1}(x)) = b_0 + b_1(A^{-1}_{11}x_1 + A^{-1}_{12}x_2 - c_1) + b_2(A^{-1}_{21}x_1 + A^{-1}_{22}x_2 - c_2) \in \mathrm{span}\{1, x_1, x_2\}$!

$\boxtimes$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $(\varphi_k)_{k=1}^3$ η Lagrange βάση του τριγώνου με κορυφές $(\alpha_k)_{k=1}^3$ τ.ω. $\varphi_k(\alpha_j) = \delta_{kj}$, $1 \le k, j \le 3$

Τότε: $\varphi_k(x) = 0 \quad \forall x \in \{\lambda \alpha_{j_1} + (1-\lambda)\alpha_{j_2} : \lambda \in [0,1]\}$ όπου: $j_1, j_2 \neq k$. Δηλ. η φ_k είναι 0 στην πλευρά απέναντι από την κορυφή k

Αποδ. Είναι προφανές στο τρίγωνο αναφοράς.

Αν $\alpha_k \leftrightarrow \hat{\alpha}_k$, $\alpha_{j_1} \leftrightarrow \hat{\alpha}_{j_1}$, $\alpha_{j_2} \leftrightarrow \hat{\alpha}_{j_2}$

$$\varphi_k(x) = \hat{\varphi}_k(F^{-1}(x)) = \hat{\varphi}_k(\lambda F^{-1}(\alpha_{j_1}) + (1-\lambda)F^{-1}(\alpha_{j_2})) = \hat{\varphi}_k(\lambda \hat{\alpha}_{j_1} + (1-\lambda)\hat{\alpha}_{j_2}) = 0.$$

$\boxtimes$

Πρόταση: Τα στοιχεία $\{\varphi_i\}_{j=1}^{3}$ της Lagrange βάσης είναι γραμμ. ανεξ.

Απόδειξη: Έστω $(\rho_i)_{i=1}^{3} \subset \mathbb{R}$ τ.ω $\sum_{i=1}^{3} \rho_i \varphi_i(x) = 0 \quad \forall x \in T$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \rho_i \varphi_i(\alpha_k) = 0 \ , k=1,2,3$$

$$\Rightarrow \rho_k \delta_{ik} = 0 , \ k=1,2,3 \Rightarrow \rho_k = 0 \ , k=1,2,3 \ \blacksquare$$

Πρόταση: Για κάθε $p \in P^1(\tau)$ ισχύει:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{3} p(\alpha_j)\varphi_j(x) \quad \forall x \in \tau.$$

Αποδ. Επειδή οι $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ αποτελούν βάση του $P^1(\tau)$ έπεται ότι:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{3} \rho_j \varphi_j(x) \quad \forall x \in \tau \Rightarrow p(\alpha_k) = \sum_{j=1}^{3} \rho_j \varphi_j(\alpha_k) \quad k=1,2,3$$

$$\Rightarrow \rho_k = p(\alpha_k) \quad k=1,2,3 \ \blacksquare$$

Ορίζουμε τον interpolant $I_\tau : C(\tau) \to P^1(\tau)$ ως εξής:

$\downarrow$ το τρίγωνο τ θεωρείται κλειστό σύνολο

$$I_\tau v(x) = \sum_{j=1}^{3} v(\alpha_j)\, \varphi_j(x) \qquad \forall x \in \tau$$

Πρόταση: $I_\tau v(\alpha_k) = v(\alpha_k)$ $k=1,2,3$.

Απόδειξη: Έστω $k \in \{1,2,3\}$ Τότε

$$I_\tau v(\alpha_k) = \sum_{j=1}^{3} v(\alpha_j)\, \varphi_j(\alpha_k) = \sum_{j=1}^{3} v(\alpha_j)\, \underbrace{\delta_{kj}}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{όταν } k\neq j}} = v(\alpha_k)\, \underbrace{\delta_{kk}}_{\substack{= \\ 1}} = v(\alpha_k)$$

■

Πρόταση: Έστω $v \in C(\tau)$ και $p \in P^1(\tau)$ τ.ω $p(\alpha_k) = v(\alpha_k)$ $k=1,2,3$ Τότε: $p = I_\tau v$

Αποδ. Επειδή $p(x) = \sum_{k=1}^{3} p(\alpha_k)\varphi_k(x)$ έπεται ότι: $p(x) = \sum_{k=1}^{3} v(\alpha_k)\varphi_k(x) = I_\tau v(x)$ $\forall x \in \tau$.

■

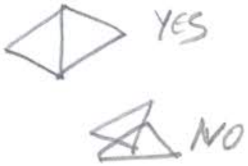
Έστω Ω ένα πολυγωνικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$.

<u>Ορισμός</u> Τριγωνισμός T του Ω καλείται μια πεπερασμένη συλλογή $\{\tau_i\}_{i\in I}$

κλειστών τριγώνων τ.ω

α) $\overline{\Omega} = \bigcup_{i\in I} \tau_i$, β) $\mathring{\tau}_i \cap \mathring{\tau}_j = \phi$ όταν $i,j\in I$ και $i\neq j$

δηλαδή τα τρίγωνα δεν επικαλύπτονται

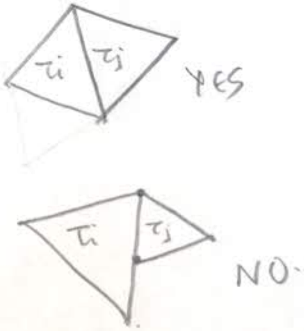


γ) όταν $\tau_i \cap \tau_j \neq \phi$ για κάποια $i,j\in I$ με $i\neq j$, τότε το $\tau_i\cap\tau_j$ είναι μονοσύνολο

ή το σύνολο $\tau_i\cap\tau_j$ είναι κοινή πλευρά των δύο τριγώνων

δηλ. υπάρχουν κοινές κορυφές α, β των τ_i, τ_j τ.ω

$$\tau_i\cap\tau_j = \{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta : \lambda\in[0,1]\}$$



Με βάση τον τριγωνισμό T μπορούμε να κατασκευάσουμε το χώρο πεπερασμένων στοιχείων S^1_T ο οποίος αποτελείται από συναρτήσεις συνεχείς στο $\bar{\Omega}$ και πάνω σε κάθε τρίγωνο $\tau \in T$ είναι στοιχεία του $P^1(\tau)$ δηλ.

$$S^1_T = \left\{ p \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) : \ p|_\tau \in P^1(\tau) \ \ \forall \tau \in T \right\}.$$

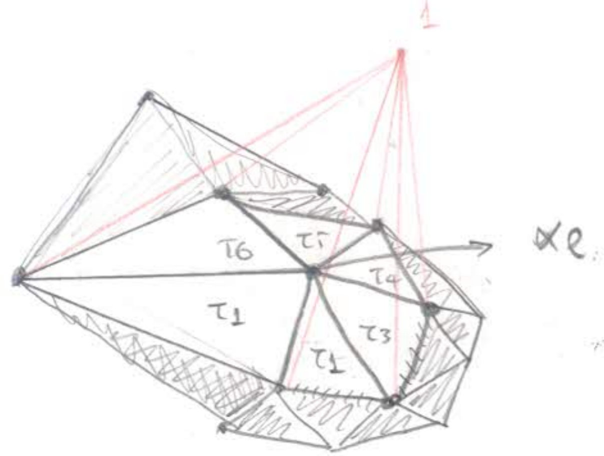
Κατασκευή Lagrange βάσης του S^1_T.

Έστω $K = \{\alpha_\ell\}_{\ell \in J}$ οι κορυφές όλων των τριγώνων $\tau \in T$. Μας ενδιαφέρει να φτιάξουμε $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in J} \subset S^1_T$ τ.ω

$$\varphi_\ell(\alpha_{\ell'}) = \delta_{\ell\ell'} \quad \text{για κάθε } \ell, \ell' \in J.$$

δηλ. η φ_ℓ στην κορυφή α_ℓ έχει την τιμή 1 και τιμή 0 στις υπόλοιπες.

(10.10)



$K_e = 6$

Έστω α_e μία κορυφή και $\{\tau_i\}_{i=1}^{k_e}$ τα τρίγωνα του T που έχουν ως κορυφή το α_e. Στη συνέχεια ορίζουμε: $\Omega_e = \bigcup_{i=1}^{k_e} \tau_i$. Επίσης έστω φ^i το στοιχείο της βάσεις Lagrange του $P^1(\tau_i)$ με τιμή 1 στην κορυφή α_e, και μηδέν τιμές στις δύο άλλες κορυφές. Τότε ορίζουμε:

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x \in \overline{\Omega_e} \\ \varphi^i(x) & \text{όταν } x \in \tau_i \end{cases}$$

Έτσι σε κάθε κορυφή του τριγώνου τ_i διαφορετική από την α_e η τιμή της φ_e θα είναι μηδέν επειδή μηδέν είναι η τιμή της φ^i όπως μηδέν είναι η τιμή στην πλευρά απέναντι από την α_e.

(10.11

Αυτό που λείπει είναι η συνέχεια της φ_e. Έστω $\Pi = \{\lambda\alpha_e + (1-\lambda)b : \lambda\in[0,1]\}$

η κοινή πλευρά δύο τριγώνων τ_i, τ_j με $1\le i,j \le k_e$, $i\neq j$. Τότε ορίζουμε:

$$P_i(\lambda) = \varphi_i(\lambda\alpha_e + (1-\lambda)b) \quad \forall \lambda\in[0,1]$$

$$P_j(\lambda) = \varphi_j(\lambda\alpha_e + (1-\lambda)b) \quad \forall \lambda\in[0,1].$$

Τα P_i, P_j είναι πολυώνυμα 1ου βαθμού ως προς λ και:

$$P_i(0) = \varphi_i(b) = 0 = \varphi_j(b) = P_j(0)$$

$$P_i(1) = \varphi_i(\alpha_e) = 1 = \varphi_j(\alpha_e) = P_j(1)$$

Άρα έχουν δύο κοινά σημεία άρα ταυτίζονται. Αυτό εξασφαλίζει την συνέχεια της φ_e στην κοινή πλευρά των τ_i, τ_j