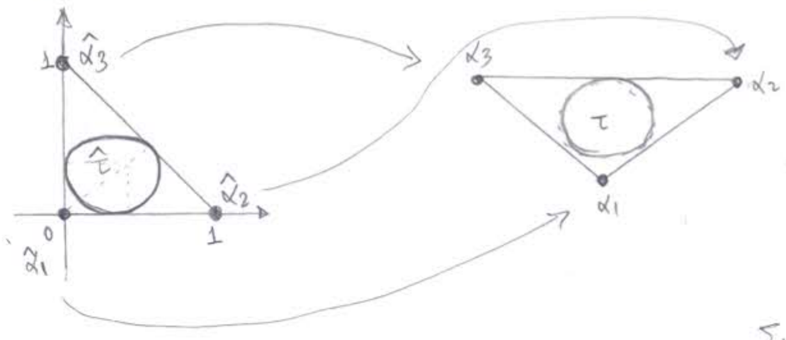
ΕΥΜ-107 Αριθμητική Λύση ΜΔΕ.

11η εξ αποστάσεως διάλεξη.

15/5/2020

5μμ-7μμ

(zoom)



$F: \hat{\tau} \to \tau$

$F(x) = Ax + b \quad \forall x \in \hat{\tau}$

$F^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b \quad \forall x \in \tau$

$F(\hat{\alpha}_i) = \alpha_i \,, \; i = 1,2,3$

Σκοπός μας η εκτίμηση του σφάλματος $v - I_\tau v$ σε ένα τρίγωνο τ.

<u>Λήμμα:</u> Έστω $v \in H^m(\tau)$, $\hat{v} := v \circ F$ και $m = 0,1,2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$|\hat{v}|_{m,\hat{\tau}} \leq C \, \|A\|_2^m \, |\det(A)|^{-1/2} \, |v|_{m,\tau}$$

$$|v|_{m,\tau} \leq C \, \|A^{-1}\|_2^m \, |\det(A)|^{1/2} \, |\hat{v}|_{m,\hat{\tau}}$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $v \in C^m(\hat{\tau})$.

<u>Περίπτωση 1:</u> $m = 0$

$$|\hat{v}|_{0,\hat{\tau}}^2 = \int_{\hat{\tau}} |v(F(\hat{x}))|^2 \, d\hat{x} = |\det(A^{-1})| \int_{\tau} |v(x)|^2 \, dx$$

$x = F(\hat{x})$

$\hat{x} = F^{-1}(x)$

$A^{-1} = J(F^{-1}(x))$

Επομένως $|\hat{v}|_{0,\hat{\tau}} = |\det(A^{-1})|^{1/2} \, |v|_{0,\tau}$, που είναι η ζητούμενη για $m = 0$, καθώς $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Περίπτωση 2 $m=1$

$$|\hat{v}|^2_{1,\hat{\tau}} := \int_{\hat{\tau}} |\partial_{\hat{x}_1}\hat{v}(\hat{x})|^2 d\hat{x} + \int_{\hat{\tau}} |\partial_{\hat{x}_2}\hat{v}(\hat{x})|^2 dx = \int_{\hat{\tau}} \left(\sum_{j=1}^{2} |\partial_{\hat{x}_j}\hat{v}(\hat{x})|^2 \right) d\hat{x}$$

$$\partial_{\hat{x}_j}(v(F(\hat{x}))) = v_{x_1}(F(\hat{x}))A_{1j} + v_{x_2}(F(\hat{x}))A_{2j} = \nabla v(F(\hat{x}))\,(A_{1j}, A_{2j}),\ j=1,2$$

$$\begin{bmatrix} \partial_{\hat{x}_1}(v(F(\hat{x}))) \\ \partial_{\hat{x}_2}(v(F(\hat{x}))) \end{bmatrix} = A\,\nabla v(F(\hat{x}))$$

$$\Downarrow$$

$$\left(|\partial_{\hat{x}_1} v(F(\hat{x}))|^2 + |\partial_{\hat{x}_2} v(F(\hat{x}))|^2 \right)^{1/2} \le \|A\|_2\, |\nabla v(F(\hat{x}))|$$

$$\|A\|_2 := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^2 \\ x\neq 0}} \frac{|Ax|_2}{|x|_2}$$

$$\le \|A\|_2^2 \int_{\hat{\tau}} |\nabla v(F(\hat{x}))|^2 d\hat{x} \underset{x=F(\hat{x})}{\le} \|A\|_2^2\, |\det(A^{-1})| \int_{\tau} |\nabla v(x)|^2 dx$$

$\le \|A\|_2^2\, |\det(A)|^{-1}\, |v|^2_{1,\tau}$. Έτσι: $|\hat{v}|_{1,\hat{\tau}} \le \|A\|_2\, |\det(A)|^{-1/2}\, |v|_{1,\tau}$, που είναι η ζητούμενη σχέση για $m=1$.

Περίπτωση 3. $m=2$.

$$|\hat{v}|_{2,\hat{\tau}}^2 \leq \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\hat{\tau}} |\partial_{\hat{x}_i\hat{x}_j} v(F(\hat{x}))|^2 \, d\hat{x}.$$

Είδαμε πριν ότι:

$$\partial_{\hat{x}_j} \hat{v}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{2} \partial_{x_i} v(F(\hat{x})) \cdot A_{ij} \quad , \; j=1,2$$

Άρα:

$$\partial_{\hat{x}_K \hat{x}_j} \hat{v}(\hat{x}) = \sum_{i_1=1}^{2} A_{i_1 j} \left(\sum_{i_2=1}^{2} \partial_{x_{i_1} x_{i_2}} v(F(\hat{x})) \, A_{i_2 K} \right)$$

$$= \left(Hv(F(\hat{x}))\, a_K, a_j \right)_2$$

$$\downarrow$$

$$\leq \| Hv(F(\hat{x})) \|_2 \, |a_K| \, |a_j| \quad \leq \|A\|_2^2 \; \|Hv(F(\hat{x}))\|_F$$

Άρα $\displaystyle |\hat{v}|_{2,\hat{\tau}}^2 \leq \int_{\hat{\tau}} \sum_{i,j=1}^{2} |\partial_{\hat{x}_i\hat{x}_j} v(F(\hat{x}))|^2 \, d\hat{x} \leq \int_{\hat{\tau}} 4 \cdot \|A\|_2^4 \, \|H_v F(\hat{x})\|_F^2 \, d\hat{x}$

$$\leq 4 \cdot \|A\|_2^4 \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\hat{\tau}} |\partial_{x_i x_j} v(F(\hat{x}))|^2 \, d\hat{x} \right\} \underset{x=F(\hat{x})}{} \leq 8 \cdot \|A\|_2^4 \cdot |\det(A^{-1})| \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\tau} |\partial_{x_i x_j} v(x)|^2 \, dx \right\}$$

Έτσι οδηγούμαστε στην:

$$|\hat{v}|_{2,\hat{\tau}} \le C_1 \, \|A\|_2^2 \, |\det(A)|^{-1/2} \, |v|_{2,\tau}.$$

Η απόδειξη της δεύτερης ανισότητας είναι ανάλογη.

Σημ. $\|A\|_2 = \max_{1\le i\le 2} \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$.

ΛΗΜΜΑ

$$\|A\|_2 \le \frac{h}{\hat{\rho}} \qquad \|A^{-1}\|_2 \le \frac{\hat{h}}{\rho}$$

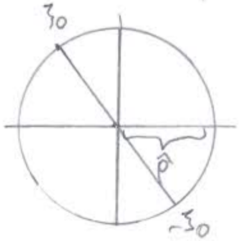
όπου: $h = diam(\tau)$, $\hat{h} = diam(\hat{\tau})$,

ρ = η ακτίνα του μεγαλύτερου κύκλου που περιέχεται στο τ

$\hat{\rho}$ = η ακτίνα του μεγαλύτερου κύκλου που περιέχεται στο $\hat{\tau}$.

Απόδειξη

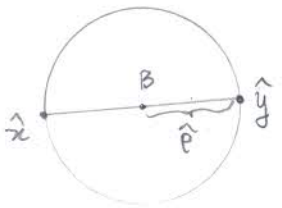
Σύμφωνα με τον ορισμό $\|A\|_2 = \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^2 \\ \xi\ne 0}} \frac{|A\xi|}{|\xi|} = \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^2 \\ |\xi|=1}} |A\xi| = \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^2 \\ |\xi|=\hat{\rho}}} \frac{|A\xi|}{\hat{\rho}} = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^2 \\ |\xi|=\hat{\rho}}} |A\xi|$



$= \frac{1}{\hat{\rho}} |A\xi_0|$ για κάποιο $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$, $|\xi_0| = \hat{\rho}$.

Έστω $\psi_0 = -\xi_0$. Τότε $|\psi_0| = \hat{\rho}$ και $|\psi_0 - \xi_0| = 2\hat{\rho}$.

Ορίζω $\hat{x} = B + \xi_0$ και $\hat{y} = B - \xi_0$ τα οποία ανήκουν



11.5

στον εγγεγραμμένο κύκλο του $\hat{\tau}$. Επίσης: $\hat{x}-\hat{y} = 2z_0$. Άρα: $\frac{\hat{x}-\hat{y}}{2} = z_0$.

Έτσι: $\|A\|_2 = \frac{1}{\hat{\rho}} |Az_0| = \frac{1}{\hat{\rho}} \left|A\left(\frac{\hat{x}-\hat{y}}{2}\right)\right| = \frac{1}{2\hat{\rho}} \left|(A\hat{x}+b)-(A\hat{y}+b)\right|$

$$= \frac{1}{2\hat{\rho}} \underbrace{|F(\hat{x})-F(\hat{y})|}_{\text{σημεία του } \tau} \le \frac{1}{2\hat{\rho}} h.$$

Ανάλογα και η άλλη ανισότητα. ∎

ΛΗΜΜΑ (Bramble - Hilbert)

$$\inf_{\hat{p}\in P^1(\hat{\tau})} \|\hat{v}-\hat{p}\|_2 \leq C(\hat{\tau})\, |\hat{v}|_{2,\hat{\tau}} \quad \forall \hat{v}\in H^2(\hat{\tau})$$

Απόδειξη

A. Έστω $v\in C^2(\hat{\tau})$. Θα φτιάξουμε πολυώνυμο $q(x)=b_0+b_1x_1+b_2x_2 \in \mathbb{P}^1(\hat{\tau})$ τ.ω

$$\int_{\hat{\tau}} q\, d\hat{x} = \int_{\hat{\tau}} v\, d\hat{x}, \quad \int_{\hat{\tau}} \partial_{\hat{x}_1} q\, d\hat{x} = \int_{\hat{\tau}} \partial_{x_1} v\, d\hat{x}, \quad \int_{\hat{\tau}} \partial_{\hat{x}_2} q\, d\hat{x} = \int_{\hat{\tau}} \partial_{\hat{x}_2} v\, d\hat{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} b_0 |\hat{\tau}| + b_1 \int_{\hat{\tau}} x_1\, d\hat{x} + b_2 \int_{\hat{\tau}} x_2\, d\hat{x} &= \int_{\hat{\tau}} v\, d\hat{x} \\ + b_1 |\hat{\tau}| &= \int_{\hat{\tau}} \partial_{x_1} v\, d\hat{x} \\ + b_2 |\hat{\tau}| &= \int_{\hat{\tau}} \partial_{x_2} V\, d\hat{x} \end{aligned}$$

το οποίο είναι επιλύσιμο

B. Θα δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $C_0>0$ τ.ω

$$\|W\|_{2,\hat{\tau}} \leq C_0 \left\{ |W|^2_{2,\hat{\tau}} + \left(\int_{\hat{\tau}} w\, dx\right)^2 + \sum_{j=1}^{2} \left(\int_{\hat{\tau}} \partial_{x_j} w\, dx\right)^2 \right\}^{1/2} \quad \forall w \in H^2(\hat{\tau})$$

Έστω ότι δεν υπάρχει C_0 αυτό σημαίνει ότι:

$$\inf_{\substack{w\in H^2(\hat{\tau}) \\ w\neq 0 \\ \|w_n\|_2 = 1}} \left\{ |w|^2_{2,\hat{\tau}} + \left(\int_{\hat{\tau}} w\, dx\right)^2 + \sum_{j=1}^{2} \left(\int_{\hat{\tau}} \partial_{x_j} w\, dx\right)^2 \right\}^{1/2} = 0.$$

Άρα υπάρχει ακολουθία $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subset H^2(\hat{\tau})$ τ.ω. $\|w_n\|_2 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$$\left\{ |w_n|_{2,\hat{\tau}}^2 + \left(\int_{\hat{\tau}} w_n \, dx\right)^2 + \sum_{j=1}^{2} \left(\int_{\hat{\tau}} \partial_{x_j} w_n \, dx\right)^2 \right\}^{1/2} \leq 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Από το (a) Rellich επειδή $\|w_n\|_2 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ δηλ. η $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη στον $H^2(\hat{\tau})$ έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(w_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ τ.ω. να συγκλίνει στον $H^1(\hat{\tau})$. Όμως η πιο πάνω σχέση σημαίνει ότι: $|w_n|_{2,\hat{\tau}} \leq 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $|w_{k_n}|_{2,\hat{\tau}} \leq 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |w_{k_n}|_{2,\hat{\tau}} = 0$. Άρα $\|w_{k_n} - w_{k_m}\|_{2,\hat{\tau}} = \left[\|w_{k_n} - w_{k_m}\|_{1,\hat{\tau}}^2 + |w_{k_n} - w_{k_m}|_{2,\hat{\tau}}^2\right]^{1/2}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$

προκύπτει ότι η $(w_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy στον $H^2(\hat{\tau})$. Άρα συγκλίνει στον $H^2(\hat{\tau})$ στην $\tilde{w} \in H^2(\hat{\tau})$.

Έτσι: $\left| \|\tilde{w}\|_2 - \|w_{k_n}\|_2 \right| \leq \|w_{k_n} - \tilde{w}\|_2 \to 0$. Άρα $\|\tilde{w}\|_2 = 1$. Επειδή $|w_{k_n}|_{2,\hat{\tau}} \to 0 \Rightarrow |\tilde{w}|_{2,\hat{\tau}} = 0$

$\Rightarrow \partial_{x_i x_j} \tilde{w} = 0$ $i, j = 1, 2$. Επιπλέον, από την πιο πάνω σχέση προκύπτει:

$\int_{\hat{\tau}} w \, dx = 0$ και $\int_{\hat{\tau}} \partial_{x_j} w \, dx = 0$ επειδή $\int_{\hat{\tau}} w_{k_n} \, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\hat{\tau}} \tilde{w} \, dx$

και $\int_{\hat{\tau}} \partial_{x_j} w_{k_n} \, dx \longrightarrow \int_{\hat{\tau}} \partial_{x_j} \tilde{w} \, dx$, $j = 1, 2$. Επειδή $\partial_{x_i x_j} \tilde{w} = 0$, $1 \leq i, j \leq 2$ $\Rightarrow \tilde{w} \in P^1$ (από Taylor) $\Rightarrow \tilde{w} = 0$

άτοπο διότι $\|\tilde{w}\|_2 = 1$.

$$\inf_{\hat{p} \in P^1(\hat{\tau})} \|\hat{v}-\hat{p}\|_2 \leq \|\hat{v}-q\|_2 \leq c \left\{ |\hat{v}-q|_2 + \Big(\underbrace{\int_{\hat{\tau}} (q-v)\, dx}_{=0} \Big)^2 + \Big(\underbrace{\int_{\hat{\tau}} (\partial_{x_j} q - \partial_{x_j} v)\, dx}_{=0} \Big)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \hat{c}\ |\hat{v}-q|_2$$