Εμμ – 107 Αριθμητική Λύση ΜΔΕ

13η εξ αποστάσεως διάλεξη

22/5/2020.

5μμ-7μμ

(zoom)

12.8

Η βάση Lagrange του $Q^1(\hat{q})$ είναι:

$$\hat{B} = \text{span}\{ \underbrace{(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2}_{\hat{q}_4}, \underbrace{(1-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_2)}_{\hat{q}_1}, \underbrace{\hat{x}_1(1-\hat{x}_2)}_{\hat{q}_2}, \underbrace{\hat{x}_1\hat{x}_2}_{\hat{q}_3} \}$$

Έχουμε ότι $\dim(Q^1(\hat{q})) = 4$ και επειδή τα $(\hat{q}_i)_{i=1}^{4}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αποτελούν βάση.

13.1

Σημ. $Q^1(\hat{q}) = \text{span}\{1, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_1\hat{x}_2\}$

$J(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = \mu_1 + \mu_2\hat{x}_1 + \mu_3\hat{x}_2 + \mu_4 \hat{x}_1\hat{x}_2 = 0 \quad \forall (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \in \hat{q}$

$\mu_1 = 0$ επειδή $J(\underbrace{0,0}_{\in \hat{q}}) = 0$.

$\partial_{\hat{x}_1} J(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = 0 \Rightarrow \mu_2 + \mu_4\hat{x}_2 = 0$ Άρα για: $(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = (1/2, 0)$ έπεται: $\mu_2 = 0$

$\partial_{\hat{x}_2} (J(\hat{x}_1,\hat{x}_2)) = 0 \Rightarrow \mu_3 + \mu_4\hat{x}_1 = 0$ Άρα για $(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = (0, 1/2)$ έπεται: $\mu_3 = 0$

Μένει. $\mu_4 \hat{x}_1\hat{x}_2 = 0 \underset{(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=(1,1)}{\Rightarrow} \mu_4 = 0$.

Αυτό αποδεικνύει ότι: $\dim Q^1(\hat{q}) = 4$. Επειδή $\hat{q}_i(\hat{\alpha}_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i,j \le 4$ έπεται ότι τα $(\hat{q}_{i})_{i=1}^{4}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία Lagrange

Η βάση Lagrange στο παραλληλόγραμμο q ορίζεται:

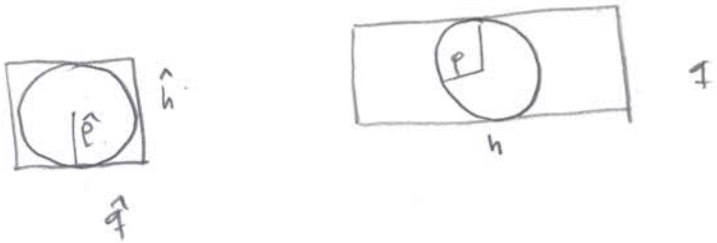
$$q_j(x) = \hat{q}_j(F^{-1}(x)) \quad \forall x \in q, \; j = 1,2,3,4.$$

Ο τελεστής παρεμβολής $I_q : \underbrace{C(q)}_{\text{συνεχού στο}} \longrightarrow Q^1(q)$ ως εξής:

$$I_q v = \sum_{j=1}^{4} v(\alpha_j)\, q_j(x).$$

Πρόταση: Έστω $g \in Q^1(q)$. Τότε $I_q p = p \quad \forall p \in Q^1(q)$.

Απόδειξη: Έστω $p \in Q^1(p)$. Τότε $p = \sum_{j=4}^{4} \lambda_j q_j$. Άρα $\lambda_j = p(\alpha_j)$ για $j = 1,\dots,4$, από τις ιδιότητες της Lagrange βάσης. ■



$\hat{h} = diam(\hat{q})$

$h = diam(q)$

$\hat{\rho} = rond(\hat{q})$

$\rho = rond(q)$

<u>ΛΗΜΜΑ 1.</u> Για κάθε $v \in H^m(q)$, $\hat{v} = v \circ F$, $m = 0, 1, 2$, τότε

$$|\hat{v}|_{m,\hat{q}} \leq C \, \|A\|_2^m \, |\det(A)|^{-1/2} \, |v|_{m,q}$$

$$|v|_{m,q} \leq C \, \|\hat{A}\|_2^m \, |\det(A)|^{-1/2} \, |\hat{v}|_{m,\hat{q}} .$$

<u>ΛΗΜΜΑ 2</u> $\|A\|_2 \leq \dfrac{h}{\hat{\rho}}$, $\|A^{-1}\|_2 \leq \dfrac{\hat{h}}{\rho}$

<u>ΛΗΜΜΑ 3.</u> (Bramble-Hilbert)

$$\inf_{\hat{q} \in P^1(\hat{p})} \|\hat{v} - \hat{q}\|_2 \leq C(\hat{\tau}) \, |\hat{v}|_{2,\hat{p}} \quad \forall \hat{v} \in H^2(\hat{p})$$

<u>Σημείωση</u> Το θεώρημα δεν εξαρτάται από το αν το χωρίο αναφοράς είναι τρίγωνο ή τετράγωνο.

Λήμμα 4

Έστω $\hat{v} \in H^2(\hat{\tau})$. Τότε υπάρχει σταθερά $C(\hat{q})$ τ.ω.

$$|\hat{v} - I_{\hat{q}}\hat{v}|_{m,\hat{\tau}} \leq C(\hat{\tau})|\hat{v}|_{2,\hat{q}}$$

Αποδ. Επειδή $\underset{=\text{span}\{1,\hat{x}_1,\hat{x}_2\}}{P^1(\hat{q})} \subsetneq \underset{\text{span}\{1,\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_1\hat{x}_2\}}{Q^1(\hat{q})}$, έπεται ότι $I_{\hat{q}}\hat{p} = \hat{p}$ $\forall \hat{p} \in P^1(\hat{q})$.

Άρα: $\hat{v} - I_{\hat{q}}\hat{v} = (\hat{v} - \hat{p}) - I_{\hat{q}}(\hat{v} - \hat{p})$ $\forall \hat{p} \in P^1(\hat{q})$.

Επίσης: $\forall \hat{w} \in H^2(\hat{q})$: $\|I_{\hat{q}}\hat{w}\|_{2,\hat{q}} \leq \sum_{\ell=1}^{4} |\hat{w}(\hat{a}_\ell)| \, \|\hat{\varphi}_\ell\|_{2,\hat{q}} \leq C(\hat{q}) \|\hat{w}\|_{2,\hat{q}}$

Έτσι: $|\hat{v} - I_{\hat{q}}\hat{v}|_{m,\hat{q}} \leq |\hat{v} - \hat{p}|_{m,\hat{q}} + |I_{\hat{q}}(\hat{v} - \hat{p})|_{m,\hat{q}}$

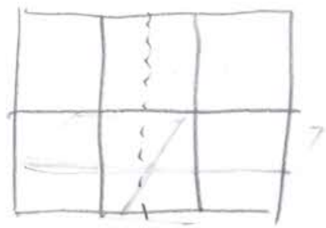
$\leq \|\hat{v} - \hat{p}\|_{2,\hat{q}} + \|I_{\hat{q}}(\hat{v} - \hat{p})\|_{2,\hat{q}}$

$\leq C(\hat{q}) \|\hat{v} - \hat{p}\|_{2,\hat{q}}$ $\quad \forall \hat{p} \in P^1(\hat{q})$.

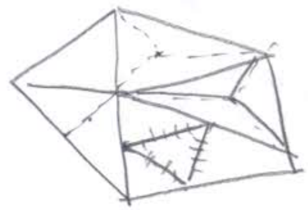
$\Rightarrow$ $|\hat{v} - I_{\hat{q}}\hat{v}|_{m,\hat{q}} \leq C(\hat{q}) \inf_{\hat{p} \in P^1(\hat{q})} \|\hat{v} - \hat{p}\|_{3,\hat{q}} \underset{\text{BH}}{\leq} C(\hat{q}) \, |\hat{v}|_{2,\hat{q}}$.

13.5

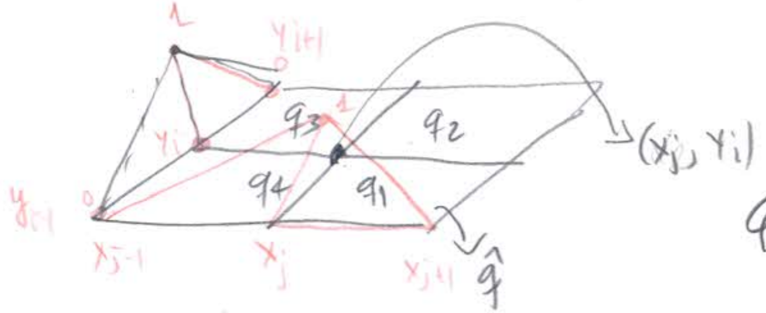
διαμέριση παραλληλόγραμμα



διαμέριση τρίγωνα



P_1 σε 3D



$$\varphi_{(j,i)} = \begin{cases} \varphi_{2,1} \text{ στο } q_2 \\ \varphi_{2,4} \text{ στο } q_1 \\ \varphi_{4,3} \text{ στο } q_4 \\ \varphi_{3,2} \text{ στο } q_3 . \end{cases}$$

$$\varphi_{(i,j)}(x,y) = \varphi_{e,1}(x_1)\,\varphi_{e,2}(x_2).$$

tensor product of splines.