ΕΥΜ-107 Αριθμητική λύση ΜΔΕ

14η εξ' αποστάσεως διάλεξη

Τρίτη 26/5/2020

(5μμ-7μμ)

zoom

Γ. Ζουράρης

version 2

1. ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

Έστω $T>0$, $d\in\mathbb{N}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ ένα φραγμένο, ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο με κατά τμήματα ομαλό σύνορο $\partial\Omega$.

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών και Dirichlet συνοριακών συνθηκών για τη γραμμική εξίσωση του κύματος είναι το ακόλουθο: βρες $w:[0,T]\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{C}$ τ.ω.

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^2 w = \tilde{\alpha}\,\Delta w + f(t,x), && \forall (t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega},\\
&w(t,x)=0 && \forall\, t\in[0,T]\\
&w_t(0,x)=w_1(x) && \forall x\in\overline{\Omega}\\
&w(0,x)=w_0(x) && \forall x\in\overline{\Omega}
\end{aligned}
$$

όπου: $\tilde{\alpha}>0$, $w_0,w_1:\overline{\Omega}\rightarrow\mathbb{R}$ με $w_0|_{\partial\Omega}=w_1|_{\partial\Omega}=0$, και $f:[0,T]\times\overline{\Omega}\rightarrow\mathbb{R}$. Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί με σ.σ Robin, Neumann αλλά και με συνοριακές συνθήκες οι οποίες περιέχουν τον όρο w_t (δυναμικές συνοριακές συνθήκες).

Πρόταση.

$$\left[\int_\Omega |w_t(t,x)|^2 dx + \tilde{\alpha}\int_\Omega |\nabla w(t,x)|^2 dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_\Omega |w_1(x)|^2 dx + \tilde{\alpha}\int_\Omega |\nabla w_0|^2 dx\right]^{1/2} + \int_0^t \left[\int_\Omega f^2(s,x)\, dx\right]^{1/2} ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Απόδειξη. Πολ/ζουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με w_t και ολοκληρώνουμε στο Ω ως προς x.

Ετοιμαζόμαστε τη σχέση:

$$\int_\Omega w_{tt} w_t \, dx = \tilde{\alpha}\int_\Omega \Delta w \, w_t \, dx + \int_\Omega f(t,x)\, w_t \, dx \qquad \forall t \in [0,T]$$

Επειδή $w(t,x)=0$ $\forall t\in[0,T]$ $\forall x \in \partial\Omega$, έπεται ότι $w_t(t,x)=0$ $\forall t\in[0,T], \forall x\in\partial\Omega$. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη έπεται:

$$\int_\Omega w_{tt} w_t \, dx = -\tilde{\alpha}\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w_t \, dx + \int_\Omega f\, w_t \, dx. \qquad \forall t \in [0,T],$$

$$(I) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\int_\Omega w_t^2 \, dx + \tilde{\alpha}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\right] = 2\int_\Omega f\, w_t \, dx \qquad \forall t \in [0,T].$$

Ορίζουμε την "ενέργεια" E του προβλήματος ως εξής:

$$E(t) := \int_\Omega w_t^2 \, dx + \tilde{\alpha}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \qquad \forall t \in [0,T]$$

Έτσι έχουμε:
$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 2\left(\int_\Omega f^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega w_t^2 \, dx\right)^{1/2} \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}E(t) \leq 2\sqrt{E(t)}\,\left(\int_{\Omega} f^2\,dx\right)^{1/2} \quad \forall t\in[0,T]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\varepsilon+E(t)}\right)^2 \leq 2\sqrt{\varepsilon+E(t)}\,\left(\int_{\Omega} f^2\,dx\right)^{1/2} \quad \forall t\in[0,T],\ \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{\varepsilon+E(t)}\ \frac{d}{dt}\sqrt{\varepsilon+E(t)} \leq 2\sqrt{\varepsilon+E(t)}\,\left(\int_{\Omega} f^2\,dx\right)^{1/2} \quad \forall t\in[0,T],\ \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sqrt{\varepsilon+E(t)} \leq \left(\int_{\Omega} f^2\,dx\right)^{1/2} \quad \forall t\in[0,T],\ \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\varepsilon+E(t)} \leq \sqrt{\varepsilon+E(0)} + \int_0^t \|f(s,\cdot)\|\,ds \quad \forall t\in[0,T],\ \forall \varepsilon>0$$

$$\overset{\varepsilon\to 0^+}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{E(t)} \leq \sqrt{E(0)} + \int_0^t \|f(s,\cdot)\|\,ds \quad \forall t\in[0,T],$$

όπου: $\|f(s,\cdot)\| := \left[\int_{\Omega} f^2(s,x)\,dx\right]^{1/2}$ και $E(0) = \int_{\Omega} |w_1|^2\,dx + \alpha^2 \int_{\Omega} |\nabla w_0|^2\,dx$.

<u>Σημ.</u> Όταν $f\equiv 0$ τότε η (I) δίνει: $\frac{d}{dt}E(t)=0 \rightarrow E(t)=E(0)$ $\forall t\in[0,T]$, δηλ. έχουμε διατήρηση της "ενέργειας".

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση $d=1$, δηλ.

Έστω $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, $T>0$ και $D=[0,T]\times[\alpha,\beta]$. Αναζητούμε $W: D \to \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\partial_t^2 W = \tilde{\alpha}\,\partial_x^2 W + f(t,x) \quad , \quad \forall (t,x)\in[0,T]\times D,$$

$$W(t,\alpha)=W(t,\beta)=0 \quad , \quad \forall t\geq 0,$$

$$W_t(0,x) = W_1(x) \quad , \quad \forall x\in[\alpha,\beta],$$

$$W(0,x) = W_0(x) \quad , \quad \forall x\in[\alpha,\beta],$$

όπου: $\tilde{\alpha}>0$, $W_0, W_1 : [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με: $W_0(\alpha)=W_0(\beta)=0$ και $W_1(\alpha)=W_1(\beta)=0$, και $f:[0,T]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, γνωστές συναρτήσεις.

Στην ΜΔΕ, εκτός από συνοριακές συνθήκες Dirichlet, μπορούμε να έχουμε σ.σ. Robin, Neumann αλλά και σ.σ. οι οποίες περιέχουν τον όρο W_t (δυναμικές συνοριακές συνθήκες).

Πεπερασμένες διαφορές:

Έστω $J\in\mathbb{N}$, $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{J}$, $x_j = \alpha + j\,\Delta x$ για $j=0,\dots,J$. Επιπλέον, έστω $N\in\mathbb{N}$, $\Delta t = T/N$, $t_n = n\cdot\Delta t$ για $n=0,\dots,N$.

2.α. Μέθοδος Courant-Friedrichs-Lewy:

Η ιδέα είναι να προσεγγίσεις της ΜΔΕ στο (t_n,x_j) για $j=1,\dots,J-1$ και $n=1,\dots,N-1$. Πρώτα παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση στο $(t,x)=(t_n,x_j)$ και έχουμε

$$W_{tt}(t_n,x_j) = \tilde{\alpha}\,W_{xx}(t_n,x_j) + f(t_n,x_j).$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του TAYLOR, όπως έχουμε κάνει στο πρόβλημα δύο σημείων, καταλήγουμε στις ακόλουθες προσεγγίσεις:

$$W_{xx}(t_n,x_j) = \frac{W(t_n,x_{j-1}) - 2W(t_n,x_j) + W(t_n,x_{j+1})}{\Delta x^2} + R_1^{n,j}$$

$$W_{tt}(t_n,x_j) = \frac{W(t_{n+1},x_j) - 2W(t_n,x_j) + W(t_{n-1},x_j)}{\Delta t^2} + R_2^{n,j}$$

όπου $\max_{n,j} |R_1^{n,j}| = O(\Delta x^2 \max_D |\partial_x^4 W|)$ και $\max_{n,j} |R_2^{n,j}| = O(\Delta t^2 \max_D |\partial_t^4 W|)$.

Για να κατασκευάσουμε προσέγγιση της $W(t_1,x_j)$ χρησιμοποιούμε τον τύπο του TAYLOR ως εξής:

$$W(t_1,x_j) = W(0,x_j) + \Delta t\, W_t(0,x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} W_{tt}(0,x_j) + O(\Delta t^3 \max_D |W_{ttt}|)$$

$$= W_0(x_j) + \Delta t\, W_1(x_j) + \frac{\Delta t^2}{2}\left[\alpha W_{xx}(0,x_j) + f(0,x_j)\right] + O(\Delta t^3 \max_D |W_{ttt}|)$$

$$= W_0(x_j) + \Delta t\, W_1(x_j) + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\alpha W_0''(x_j) + f(0,x_j)\right) + O(\Delta t^3 \max_D |W_{ttt}|)$$

προσέγγιση 3ης τάξης

Μπορεί κανείς να σταματήσει στον όρο 2ης τάξης, δηλ.

$$W(t_1,x_j) = W_0(x_j) + \Delta t\, W_1(x_j) + O(\Delta t^2 \max_D |W_{tt}|).$$

2ης τάξης προσέγγιση

Αλλά στο ίδιο πρόβλημα προσέγγιση του W_t είναι κατά 1 μικρότερη

Για $n=0,\dots,N$, $j=0,\dots,J$, η μέθοδος κατασκευάζει προσέγγιση W_j^n του $w(t_n,x_j)$ με βάση τα ακόλουθα βήματα:

ΒΗΜΑ 1: $W_j^0 = w_0(x_j)$ για $j=0,\dots,J$ (Επειδή $w_0(a)=w_0(b)=0$, έπεται: $W_0^0=W_J^0=0$)

ΒΗΜΑ 2:

$$W_j^1 = w_0(x_j)+\Delta t\, w_1(x_j)+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\alpha w_0''(x_j)+f(0,x_j)\right), \quad \text{για } j=1,\dots,J-1. \qquad (I)$$

ή

$$W_j^1 = w_0(x_j)+\Delta t\, w_1(x_j), \quad \text{για } j=1,\dots,J. \qquad (II)$$

$$W_0^1=W_J^1=0$$

ΒΗΜΑ 3: Για $n=1,\dots,N-1$, προσδιορίζουμε $\left(W_j^{n+1}\right)_{j=0}^{J}$ ως εξής

3.α. $W_0^{n+1}=W_0^{n+1}=0$

3.β
$$\frac{W_j^{n+1}-2W_j^n+W_j^{n-1}}{\Delta t^2}=\alpha\,\frac{W_{j-1}^n-2W_j^n+W_{j+1}^n}{\Delta x^2}+f(t_n,x_j) \quad \text{για } j=1,\dots,J-1.$$

Τάξη σύγκλισης $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$ → στην περίπτωση I
ή
$O(\Delta t+\Delta x^2)$ → Περίπτωση II

Σημείωση: Είναι προφανές ότι ο υπολογισμός των W_j^{n+1} είναι άμεσος και δεν απαιτεί την λύση γραμμικού συστήματος. Όμως η μέθοδος είναι "ευσταθής" και κατά συνέπεια "συγκλίνουσα" όταν $\frac{\Delta t}{\Delta x}\le C$ όπου C μία σταθερά που εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος, απαίτηση γνωστή ως CFL-condition.

2.6 Μέθοδος Crank-Nicolson.

Στη μέθοδο Crank-Nicolson το ουσιαστικό είναι η προσέγγιση της ΔΕ στο $(t,x)=(t_n,x_j)$, δηλ.

$$W_{tt}(t_n,x_j) = \tilde{\alpha} W_{xx}(t_n,x_j) + f(t_n,x_j)$$

ως εξής:

$$W_{xx}(t_n,x_j) = \frac{W_{xx}(t_{n+1},x_j)+W_{xx}(t_{n-1},x_j)}{2} + O(\Delta t^2 \max_D |W_{xtt}|)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{W(t_{n+1},x_{j+1})-2W(t_{n+1},x_j)+W(t_{n+1},x_{j-1})}{\Delta x^2} + \frac{W(t_{n-1},x_{j-1})-2W(t_{n-1},x_j)+W(t_{n-1},x_{j+1})}{\Delta x^2}\right]$$

$$+ O(\Delta t^2 \max_D |W_{xtt}| + \Delta x^2 \max_D |W_{xxxx}|)$$

και.

$$W_{tt}(t_n,x_j) = \frac{W(t_{n+1},x_j)-2W(t_n,x_j)+W(t_{n-1},x_j)}{\Delta x^2} + O(\Delta t^2 \max_D |W_{tttt}|)$$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου έχει ως εξής:

<u>ΒΗΜΑ 1:</u> $\overline{W}_j^0 = w_0(x_j) \quad j=0,\dots,J$.

<u>ΒΗΜΑ 2:</u> $\overline{W}_j^1 = w_0(x_j) + \Delta t\, w_1(x_j) + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\alpha\, w_0''(x_j) + f(0,x_j)\right), \; j = 1,\dots,J-1$

$\overline{W}_j^1 = w_0(x_j) + \Delta t\, w_1(x_j), \; j=1,\dots,J,$

$\overline{W}_0^1 = \overline{W}_J^1 = 0$.

<u>ΒΗΜΑ 3:</u> Για $n=1,\dots,N-1$, προσδιορίζουμε $\left(\overline{W}_j^{n+1}\right)_{j=0}^{J}$ ως εξής:

3α $\quad \overline{W}_0^{n+1} = \overline{W}_J^{n+1} = 0$

3β
$$\frac{\overline{W}_j^{n+1} - 2\overline{W}_j^{n} + \overline{W}_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \alpha\left\{\frac{\overline{W}_{j-1}^{n+1} - 2\overline{W}_j^{n+1} + \overline{W}_{j+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{\overline{W}_{j-1}^{n} - 2\overline{W}_j^{n} + \overline{W}_{j+1}^{n}}{2\Delta x^2}\right\} + f(t_n, x_j),$$

$j = 1,\dots,J-1$.

<u>Παρατηρήσεις:</u> Απαιτείται λύση γραμμικού συστήματος σε κάθε χρονικό βήμα και δεν απαιτούνται συνθήκες ευστάθειας (unconditionally stable). Η τάξη σφάλματος $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$.

Παραλλαγή Newmark $\quad w_{xx}(t_n,x_j) \simeq \theta\, w_{xx}(t_{n+1},x_j) + (1-2\theta)\, w_{xx}(t_n,x_j) + \theta\, w_{xx}(t_{n-1},x_j) \dots$

$\theta>0, \; 0 \le \theta \le 1/4$ (βλ. Σημειώσεις Β. Δουγαλή)