ΕΥΜ-107 Αριθμητική ΛΥΣΗ ΜΔΕ

15η Εξ' αποστάσεως διάλεξη

Παρασκευή 29/5/2020

(5μμ-7μμ)

version 2

Γ. Ζουράρης.

## Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRÖDINGER

Έστω $T>0$, $d\in\mathbb{N}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ ένα φραγμένο, ανοιχτό και συνεκτικό με κατά τμήματα ομαλό σύνορο $\partial\Omega$.

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών για τη γραμμική εξίσωση Schrödinger, έχει τη μορφή: βρες $u:[0,T]\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{C}$ τ.ω.

$$\partial_t u = i\,\Delta u + i\,V(t,x)\,u \quad \forall (t,x)\in(0,T]\times\Omega,$$

$$u(t,x)=0 \quad \forall x\in\partial\Omega,\ \forall t\in(0,T],$$

$$u(0,x)=u_0(x) \quad \forall x\in\overline{\Omega}$$

όπου $u_0:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ γνωστή συνάρτηση με $u_0|_{\partial\Omega}=0$ και $V:[0,T]\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η $u$ είναι συνεχής στο $[0,T]\times\overline{\Omega}$ και επιπλέον αρκετά ομαλή στο $[0,T]\times\overline{\Omega}$ ώστε να εξασφαλίζεται ότι η $u$ είναι λύση της ΜΔΕ στο $[0,T]\times\overline{\Omega}$. Στο παραπάνω πρόβλημα οι σ.σ. είναι ομογενείς τύπου Dirichlet.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 1:** $\displaystyle\int_\Omega |u(t,x)|^2\,dx = \int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx \quad ,\forall t\in[0,T] \qquad (I)$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ΜΔΕ με $\bar{u}$ και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς $x$ στο $\Omega$. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα:

$$\int_\Omega \partial_t u\,\bar{u}\,dx = i\int_\Omega \Delta u\,\bar{u}\,dx + i\int_\Omega V\,|u|^2dx \quad \forall t\in[0,T]$$

Παρατηρώντας ότι $\int_\Omega V|u|^2dx\in\mathbb{R}$ και ότι $\int_\Omega \Delta u\,\bar{u}\,dx = -\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}u\,\partial_{x_j}\bar{u}\Big)dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2dx \in\mathbb{R}$ για κάθε $t\in[0,T]$, συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{Re}\left[\int_\Omega \partial_t u\, \bar{u}\, dx\right] = 0 \quad \forall t \in [0,T]$. Παρατηρώντας ότι:

$$\partial_t |u|^2 = \partial_t (u\bar{u}) = \partial_t u\, \bar{u} + u\, \partial_t \bar{u} = 2\,\mathrm{Re}\left[\partial_t u\, \bar{u}\right]$$

έχουμε τα ακόλουθα: $\mathrm{Re}\left[\int_\Omega \partial_t u\, \bar{u}\, dx\right] = 0 \Rightarrow \int_\Omega \mathrm{Re}[\partial_t u\, \bar{u}]\, dx = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t |u|^2\, dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\int_\Omega |u|^2\, dx\right] = 0 \qquad \forall t \in [0,T].$$

Ολοκληρώνοντας ως προς $t$, έπεται ότι: $\int_\Omega |u(t,x)|^2 dx = \int_\Omega |u(0,x)|^2 dx = \int_\Omega |u_0|^2 dx \quad \forall t \in [0,T]$.

Λόγω της παραπάνω ιδιότητας, υπάρχει προτίμηση για αριθμητικές μεθόδους οι οποίες ικανοποιούν ένα διακριτό ανάλογο της (I), οι οποίες γι'αυτό το λόγο καλούνται "συντηρητικές" (conservative).

Μία τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος Crank-Nicolson συνδυασμένη με μία μέθοδο πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων στοιχείων.

Για απλούστευση θα περιορισούμε στην περίπτωση $d=1$ με: $\Omega=[\alpha,\beta]$. Έτσι το πρόβλημα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών παίρνει τη μορφή:

$$u_t = i\,u_{xx} + i\,V u \quad \text{στο } (0,T]\times(\alpha,\beta),$$

$$u(t,\alpha)=u(t,\beta)=0 \quad \forall t\in(0,T],$$

$$u(0,x)=u_0(x) \quad \forall x\in[\alpha,\beta],$$

με: $u_0(\alpha)=u_0(\beta)=0$.

## Μέθοδος Crank-Nicolson / Πεπερασμένων Διαφορών

Έστω $J\in\mathbb{N}$ με $J\geq 2$, $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{J}$, $x_j=\alpha+j\Delta x$ για $j=0,\dots,J$. Ακόμη, έστω $N\in\mathbb{N}$, $\Delta t=\frac{T}{N}$ και $t_n=n\Delta t$ για $n=0,\dots,N$. Η μέθοδος κατασκευάζει προσέγγιση $U_j^n\in\mathbb{C}$ της $u(t_n,x_j)$ ως εξής:

<u>Βήμα 1:</u> Ορίζουμε $U^0=(U_j^0)_{j=0}^{J}\in\mathbb{C}^{J+1}$ ως εξής:

$$U_j^0=u_0(x_j) \text{ για } j=0,\dots,J.$$ (Επειδή $u_0(\alpha)=u_0(\beta)=0$, έπεται ότι $U_0^0=U_J^0=0$).

<u>Βήμα 2:</u> Για $n=0,\dots,N-1$, υπολογίζουμε $U^{n+1}=(U_j^{n+1})_{j=0}^{J}\in\mathbb{C}^{J+1}$, έτσι ώστε να ικανοποιούν την απαίτηση:

$$\text{(II)}\qquad \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} = i\left[\frac{U_{j+1}^{n+1}-2U_j^{n+1}+U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2}+\frac{U_{j+1}^{n}-2U_j^{n}+U_{j-1}^{n}}{2\Delta x^2}\right]+i\,V(t^{n+1/2},x_j)\,\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2},\quad j=1,\dots,J-1,$$

με: $U_0^{n+1}:=0$, $U_J^{n+1}:=0$ και $t^{n+1/2}:=\frac{t_{n+1}+t_n}{2}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η μέθοδος ικανοποιεί ένα διακριτό ανάλογο της (Ι). [15.4]

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 2:</u> Για $n=0,\dots,N$ ισχύει ότι: $\|U^n\|_{\Delta x}=\|U^0\|_{\Delta x}$, όπου: $\|V\|_{\Delta x}=\left(\Delta x\sum_{j=1}^{J-1}|V_j|^2\right)^{1/2}$ για κάθε $V=(V_j)_{j=0}^{J}\in\mathbb{C}^{J+1}$.

<u>Απόδειξη:</u> Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (ΙΙ) με $\Delta x\,\overline{(U_j^{n+1}+U_j^n)}$ και αθροίζοντας ως προς $j$ από $1$ έως $J-1$, παίρνουμε τα ακόλουθα:

$$\Delta x\sum_{j=1}^{J-1}\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t}\,\overline{(U_j^{n+1}+U_j^n)}=T_1^n+T_2^n$$

όπου: $$T_1^n=\frac{i\Delta x}{2}\sum_{j=1}^{J-1}\left[\frac{(U^{n+1}+U^n)_{j+1}-2(U^{n+1}+U^n)_j+(U^{n+1}+U^n)_{j-1}}{\Delta x^2}\right]\overline{(U_j^{n+1}+U_j^n)}$$

και $$T_2^n=i\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=1}^{J-1}V(t^{n+1/2},x_j)\,|U_j^{n+1}+U_j^n|^2.$$

Ας απλουστεύσουμε το συμβολισμό θέτοντας $w_j=U_j^{n+1}+U_j^n$ για $j=0,\dots,J$. Τότε:

15.5

$$T_1^n = i\,\frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\Delta x^2}\,\bar{w}_j$$

$$= i\,\frac{1}{2\Delta x} \left\{ \sum_{j=1}^{J-1} (w_{j+1} - w_j)\,\bar{w}_j - \sum_{j=1}^{J-1} (w_j - w_{j-1})\,\bar{w}_j \right\}$$

$$= i\,\frac{1}{2\Delta x} \left\{ \sum_{j=0}^{J-1} (w_{j+1} - w_j)\,\bar{w}_j - \sum_{j=0}^{J-2} (w_{j+1} - w_j)\,\bar{w}_{j+1} \right\}$$

$$= i\,\frac{1}{2\Delta x} \left\{ \sum_{j=0}^{J-1} (w_{j+1} - w_j)\,\bar{w}_j - \sum_{j=0}^{J-1} (w_{j+1} - w_j)\,\bar{w}_{j+1} \right\}$$

$$= i\,\frac{1}{2\Delta x} \sum_{j=0}^{J-1} (w_{j+1} - w_j)\,\overline{(w_j - w_{j+1})} = -i\,\frac{1}{2\Delta x} \sum_{j=0}^{J-1} |w_{j+1} - w_j|^2$$

$$= -i\,\Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left| \frac{w_{j+1} - w_j}{\Delta x} \right|^2$$

Άρα: $T_1^n = -i\,\Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left| \frac{(u^{n+1}+u^n)_{j+1} - (u^{n+1}+u^n)_j}{\Delta x} \right|^2$ για $n=0,\dots,N-1$, το οποίο είναι ένα διακριτό ανάλογο

της σχέσης: $\int_\alpha^b u_{xx}\bar{u}\,dx = -\int_\alpha^b u_x \bar{u}_x\,dx = -\int_\alpha^b |u_x|^2 dx.$

Έτσι: $Re\left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} - u_j^n)(\bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_j^n)\right] = 0$ για $n=0,\dots,N-1.$ (III)

15,6

Παρατηρώντας ότι για κάθε $z,w \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{Re}\left[(z-w)(\bar{z}+\bar{w})\right] = \mathrm{Re}\left[z\bar{z}+z\bar{w}-w\bar{z}-w\bar{w}\right]$$
$$= \mathrm{Re}\left[|z|^2+z\bar{w}-w\bar{z}-|w|^2\right]$$
$$= |z|^2-|w|^2+\mathrm{Re}(z\bar{w})-\mathrm{Re}(\overline{\bar{w}z})$$
$$= |z|^2-|w|^2+\mathrm{Re}(z\bar{w})-\mathrm{Re}(\bar{w}z)$$
$$= |z|^2-|w|^2$$

συμπεραίνουμε από την (III) ότι:

$$\Delta x \sum_{j=1}^{J-1} \left(|U_j^{n+1}|^2-|U_j^n|^2\right) = 0 \quad , n=0,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow \quad \|U^{n+1}\|_{\Delta x}^2 = \|U^n\|_{\Delta x}^2 \quad , n=0,\dots,N-1.$$

Με επαγωγή εύκολα αποδεικνύεται ότι: $\|U^n\|_{\Delta x}^2 = \|U^0\|_{\Delta x}^2$ για $n=0,\dots,N-1$

$$\Rightarrow \quad \|U^n\|_{\Delta x} = \|U^0\|_{\Delta x} \text{ για } n=0,\dots,N-1 \quad \blacksquare$$

Ας δούμε στη συνέχεια γιατί η μέθοδος είναι καλά ορισμένη

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 3:</u> Οι προσεγγίσεις $(U_j^n)_{j=0}^{J}$ είναι καλά ορισμένες για $n=1,\dots,N$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> Έστω $n\in\{1,\dots,N\}$. Από την (Π) έπεται ότι

$$\frac{1}{\Delta t}U_j^n-\frac{i}{2\Delta x^2}\left(U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n\right)-\frac{i}{2}V(t^{n-1/2},x_j)U_j^n=b_j^n \quad ,\text{ για } j=1,\dots,J-1,$$

όπου $b_j^n:=\frac{1}{\Delta t}U_j^{n-1}+\frac{i}{2\Delta x^2}\left(U_{j+1}^{n-1}-2U_j^{n-1}+U_{j-1}^{n-1}\right)+\frac{i}{2}V(t^{n-1/2},x_j)U_j^{n-1}$. Έτσι τα $(U_j^n)_{j=1}^{J-1}$ προσδιορίζονται ως λύση ενός γραμμικού συστήματος της μορφής

$$A\begin{pmatrix}U_1^n\\ \vdots\\ U_{J-1}^n\end{pmatrix}=b^n$$

όπου ο πίνακας $A$ είναι συμμετρικός και τριδιαγώνιος. Για να εξασφαλίσουμε την αντιστρεψιμότητα του $A$ αρκεί να δείξουμε ότι αν $\xi\in Ker(A)$ τότε $\xi=0$.

Έστω $\xi=(\xi_j)_{j=1}^{J-1}\in Ker(A)$. Ορίζουμε επιπλέον $\xi_0=\xi_J=0$. Τότε $A\xi=0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\Delta t}\xi_j-\frac{i}{2\Delta x^2}\left(\xi_{j+1}-2\xi_j+\xi_{j-1}\right)-i\,V(t^{n-1/2},x_j)\xi_j=0 \quad ,\ j=1,\dots,J-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t}\sum_{j=1}^{J-1}|\xi_j|^2-\frac{i}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J-1}\left(\xi_{j+1}-2\xi_j+\xi_{j-1}\right)\overline{\xi_j}-i\sum_{j=1}^{J-1}V(t^{n-1/2},x_j)|\xi_j|^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t}\sum_{j=1}^{J-1}|\xi_j|^2 + \frac{i}{2}\underbrace{\sum_{j=0}^{J-1}\left|\frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{\Delta x}\right|^2}_{\in \mathbb{R}} - i\underbrace{\sum_{j=1}^{J-1} V(t^{n-\frac{1}{2}}, x_j)\,|\xi_j|^2}_{\in \mathbb{R}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t}\sum_{j=1}^{J-1}|\xi_j|^2 = 0 \Rightarrow \xi_j = 0 \quad \text{για } j=1,\dots,J-1.$$

$\blacksquare$

<u>Σύγκλιση</u> $\max\limits_{0\le n\le N} \|U^n - u^n\|_{\Delta x} \le C(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ με $u^n = (u_j^n)_{j=0}^J$ και $u_j^n := u(t_n, x_j)$ για $j=0,\dots,J$ και $n=0,\dots,N$. Η απόδειξη σύγκλισης είναι ανάλογη με την απόδειξη σύγκλισης της μεθόδου Crank-Nicolson/Πεπερασμένων διαφορών για την Εξίσωση θερμότητας λαμβάνοντας υπόψιν το επιχείρημα ευστάθειας που περιέχεται στην απόδειξη της Πρότασης 2.

# Μέθοδος Crank-Nicolson / Πεπερασμένων Στοιχείων

ΒΗΜΑ 1: $U^0 \in H$ μια προσέγγιση του $u^0$ από το χώρο πεπερασμένων στοιχείων $H$

ΒΗΜΑ 2: Για $n=0,\dots,N-1$, βρίσκουμε $U^{n+1} \in H$ τ.ω.

$$\left(\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t},\chi\right) + i\left(\nabla\frac{U^{n+1}+U^n}{2},\nabla\chi\right) = i\left(V(t^{n+1/2},\cdot)\,\frac{U^{n+1}+U^n}{2},\chi\right) \quad \forall \chi \in H$$

όπου: $(v,w) := \int_{\Omega} v\,\bar{w}\,dx$ για κάθε $v,w \in L^2(\Omega;\mathbb{C})$.

# Μη γραμμική κυβική Schrödinger

$$\partial_t u = i\,\Delta u + i\lambda |u|^2 u \quad \text{στο } (0,T]\times\Omega,$$

$$u(t,x)=0 \qquad \forall x\in\partial\Omega,\ \forall t\in(0,T],$$

$$u(0,x)=u_0(x) \qquad \forall x\in\overline{\Omega}$$

όπου:

$d\in\{1,2,3\}$, $u_0:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ με $u_0|_{\partial\Omega}=0$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Χρησιμοποιείται ως μαθηματικό μοντέλο για την περιγραφή διάδοσης κυμάτων σε οπτικές ίνες. Όταν $d=1$ το πρόβλημα έχει λύση για κάθε $T>0$ (global existence). Όταν $d=3$ το πρόβλημα έχει λύση για μικρό $T$ (local existence). Όταν $d=2$ το πρόβλημα έχει λύση για κάθε $T>0$ όταν $\lambda\le 0$ και $\|u_0\|_{H^2}\le C$ όπου $C$ κατάλληλη σταθερά. Διαφορετικά το πρόβλημα έχει λύση για μικρό $T$.

**Πρόταση 4:** $\displaystyle\int_\Omega |u|^2\,dx=\int_\Omega |u_0|^2\,dx \quad \forall t\in[0,T]$ (Διατήρηση φορτίου)

**Αποδ:** Η απόδειξη είναι παρόμοια εκείνης της Πρότασης 1, λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

$$\lambda\int_\Omega |u|^2 u\bar{u}\,dx=\lambda\int_\Omega |u|^4\,dx\in\mathbb{R}$$ ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega} |u|^4 dx = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega} |u_0|^4 dx \quad \forall t \in [0,T]$ (Διατήρηση Ενέργειας)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ΜΔΕ με $\bar{u}_t$ και ολοκληρώνουμε στο $\Omega$ ως προς $x$.

Έτσι έχουμε τα ακόλουθα:

$$\int_{\Omega} u_t \bar{u}_t \, dx = i \int_{\Omega} \Delta u \, \bar{u}_t \, dx + i\lambda \int_{\Omega} |u|^2 u \bar{u}_t \, dx \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |u_t|^2 dx = -i \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{u}_t \, dx + i\lambda \int_{\Omega} |u|^2 u \bar{u}_t \, dx \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow I_m\left[\int_{\Omega} |u_t|^2 dx\right] = I_m\left[-i\int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{u}_t \, dx + i\lambda \int_{\Omega} |u|^2 u \bar{u}_t \, dx\right] \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow 0 = -Re\left[\int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{u}_t \, dx\right] + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 Re(u\bar{u}_t) \, dx \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{d} Re(\partial_{x_j} u \, \partial_t \partial_{x_j} \bar{u}\right) dx = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \partial_t(|u|^2) \, dx \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{d} \partial_t |\partial_{x_j}|^2\right) dx = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \partial_t(|u|^2) \, dx \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|u|^2)^2 dx \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^4 dx\right] = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^4 dx = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_0|^4 dx \quad \forall t \in [0,T].$$

<u>Σημ</u> Όταν $\lambda \leq 0$ η διατήρηση της ενέργειας εγγυάται ότι

$$|u(t,\cdot)|_{1,\Omega} \leq \left[|u_0|_{1,\Omega}^2 - \frac{\lambda}{2}\|u_0\|_{4,\Omega}^4\right]^{1/2} \quad \forall t \in [0,T]$$

όπου $|v|_{1,\Omega} := \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2}$ και $\|v\|_{4,\Omega} = \left(\int_\Omega |v|^4 dx\right)^{1/4}$.

Για την αριθμητική προσέγγιση της λύσης $u$ του προβλήματος υπάρχει ενδιαφέρον για αριθμητικές μεθόδους που ικανοποιούν με διακριτό τρόπο τη διατήρηση φορτίου και ενέργειας όπως αυτές παρουσιάστηκαν στις Προτάσεις 4 και 5. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο διακριτοποιήσεις ως προς το χρόνο (οι οποίες εύκολα μπορούν να συνδυαστούν με μια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων ή μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών) και έχουν τις προαναφερόμενες ιδιότητες.

## Σχήμα Delfour–Fortin–Payre (1981)

Βήμα 1. $U^0 = u_0$

Βήμα 2. Για $n=0,\dots,N-1$, η προσέγγιση $U^{n+1}$ της $u(t_{n+1},\cdot)$ προσδιορίζεται από την απαίτηση:

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} = i\,\Delta\left(\frac{U^{n+1}+U^n}{2}\right) + i\lambda\,\frac{|U^{n+1}|^2+|U^n|^2}{2}\,\frac{U^{n+1}+U^n}{2} \quad \text{και} \quad U^{n+1}|_{\partial\Omega}=0,$$

δηλ. το $U^{n+1}$ είναι λύση μιας ελλειπτικού τύπου ΜΔΕ.

Πρόταση 6: $\|U^n\| = \|u_0\|$ για $n=0,\dots,N$, όπου $\|v\| := \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη: Πολλαπλασιάζουμε με $(\overline{U^{n+1}+U^n})$ και ολοκληρώνουμε ως προς $x$ στο $\Omega$. Έτσι:

$$\int_\Omega \frac{(U^{n+1}-U^n)\,(\overline{U^{n+1}+U^n})}{\Delta t}\,dx = -i\int_\Omega \nabla\frac{(U^{n+1}+U^n)}{2}\cdot\nabla(\overline{U^{n+1}+U^n})\,dx + i\lambda\int_\Omega \frac{|U^{n+1}|^2+|U^n|^2}{2}\,|U^{n+1}+U^n|^2\,dx$$

$$= -\frac{i}{2}\int_\Omega |\nabla(U^{n+1}+U^n)|^2 dx + i\frac{\lambda}{2}\int_\Omega (|U^{n+1}|^2+|U^n|^2)\,|U^{n+1}+U^n|^2\,dx, \quad n=0,\dots,N-1,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{Re}\left[\int_\Omega (U^{n+1}-U^n)\,(\overline{U^{n+1}+U^n})\,dx\right] = 0, \quad n=0,\dots,N-1 \Rightarrow \|U^{n+1}\|^2 = \|U^n\|^2 \quad \text{για } n=0,\dots,N-1,$$

από την οποία με μαθηματική επαγωγή αποδεικνύεται ότι $\|U^n\| = \|u^0\|$ για $n=0,\dots,N$. ∎

Πρόταση 7. $\int_{\Omega} |\nabla U^n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |U^n|^4 dx = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_0|^4 dx$ για $n=0,\dots,N$.

Απόδειξη: Πολ/ζουμε και τα δύο μέλη με $(\overline{U^{n+1}-U^n})$ και ολοκληρώνουμε ως προς $x$ στο $\Omega$. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (U^{n+1}-U^n)(\overline{U^{n+1}-U^n})\, dx = i \int_{\Omega} \Delta\left(\frac{U^{n+1}+U^n}{2}\right)(\overline{U^{n+1}-U^n})\, dx + i\lambda \int_{\Omega} \frac{|U^{n+1}|^2+|U^n|^2}{4} (U^{n+1}+U^n)(\overline{U^{n+1}-U^n})\, dx \quad, n=0,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} |U^{n+1}-U^n|^2 dx = -i \int_{\Omega} \nabla\left(\frac{U^{n+1}+U^n}{2}\right) \nabla(\overline{U^{n+1}-U^n})\, dx + i\frac{\lambda}{4} \int_{\Omega} (|U^{n+1}|^2+|U^n|^2)(U^{n+1}+U^n)(\overline{U^{n+1}-U^n})\, dx, \quad n=0,\dots N-1$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} Re\left[\int_{\Omega} \nabla(U^{n+1}+U^n)\cdot\nabla(\overline{U^{n+1}-U^n})\, dx\right] + \frac{\lambda}{4} \int_{\Omega} (|U^{n+1}|^2+|U^n|^2) Re\left[(U^{n+1}+U^n)(\overline{U^{n+1}-U^n})\right] dx, \quad n=0,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla U^{n+1}|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla U^n|^2 dx = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (|U^{n+1}|^2+|U^n|^2)(|U^{n+1}|^2-|U^n|^2)\, dx, \quad n=0,\dots N-1$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (|U^{n+1}|^4 - |U^n|^4)\, dx, \quad n=0,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla U^{n+1}|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |U^{n+1}|^4 dx = \int_{\Omega} |\nabla U^n|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |U^n|^4 dx, \quad n=0,\dots,N-1$$

$\blacksquare$

Με επαγωγή καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση.

<u>Σύγκλιση</u>: $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$ στην $L^2(\Omega)$-νόρμα διακριτοποιώντας με πεπερασμένα στοιχεία (Akrivis, Dougalis, Karakashian 1991) και με πεπερασμένες διαφορές (Akrivis 1993).

## Σχήμα Perez-Garcia-Vazquez (1995)

<u>Βήμα 1</u> $U^0=u_0$ και $U^1$ προσέγγιση της $u(t_1,\cdot)$ με $U^1|_{\partial\Omega}=0$, η οποία μπορεί να κατασκευαστεί π.χ. ως εξής:

$$\frac{U^1-U^0}{\Delta t}=i\,\Delta\left(\frac{U^1+U^0}{2}\right)+i\lambda|U^0|^2\,\frac{U^0+U^1}{2}.$$

<u>Βήμα 2</u>: Για $n=1,\dots,N-1$, η προσέγγιση $U^{n+1}$ της $u(t_{n+1},\cdot)$ προσδιορίζονται από τις απαιτήσεις

$$\frac{U^{n+1}-U^{n-1}}{2\Delta t}=i\,\Delta\left(\frac{U^{n+1}+U^{n-1}}{2}\right)+i\lambda|U^n|^2\,\frac{U^{n+1}+U^{n-1}}{2}\quad\text{και}\quad U^{n+1}|_{\partial\Omega}=0,$$

δηλ. το $U^{n+1}$ είναι λύση μιας γραμμικής ΜΔΕ ελλειπτικού τύπου.

<u>Πρόταση 8</u>:
$$\|U^n\|=\begin{cases}\|U^0\| & \text{όταν } n \text{ άρτιος}\\ \|U^1\| & \text{όταν } n \text{ περιττός}\end{cases},\quad n=0,\dots,N$$

<u>Απόδειξη</u>: Πολλαπλασιάζοντας με $\overline{(U^{n+1}+U^{n-1})}$, ολοκληρώνοντας ως προς $x$ στο $\Omega$ έπεται:

$$\mathrm{Re}\left[\int_\Omega\frac{U^{n+1}-U^{n-1}}{2\Delta t}\,\overline{(U^{n+1}+U^{n-1})}\,dx\right]=\mathrm{Re}\left\{-\frac{i}{2}\int_\Omega|\nabla(U^{n+1}+U^{n-1})|^2dx+i\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|U^n|^2|U^{n+1}+U^{n-1}|^2dx\right\}=0,\quad n=1,\dots,N-1$$

$\Rightarrow \quad \|U^{n+1}\|^2 = \|U^{n-1}\|^2$, για $n=1,\dots,N-1$, η οποία οδηγεί στο ζητούμενο.

**Πρόταση 9.** $\int_\Omega |\nabla U^{n+1}|^2 dx + \int_\Omega |\nabla U^n|^2 dx - \lambda \int_\Omega |U^{n+1}|^2 |U^n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla U^1|^2 dx + \int_\Omega |\nabla U^0|^2 dx - \lambda \int_\Omega |U^1|^2 |U^0|^2 dx$

για $n=0,\dots,N-1$.

**Απόδειξη:** Πολλ/ζουμε και τα δύο μέλη με $(\overline{U^{n+1}-U^{n-1}})$ και ολοκληρώνουμε ως προς $x$ στο $\Omega$.

Τότε έχουμε:

$$\frac{1}{2\Delta t}\int_\Omega |U^{n+1}-U^{n-1}|^2 dx = -\frac{i}{2}\int_\Omega \nabla(U^{n+1}+U^{n-1})\cdot\nabla(\overline{U^{n+1}-U^{n-1}})\, dx + i\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |U^n|^2 (U^{n+1}+U^{n-1})(\overline{U^{n+1}-U^{n-1}})\, dx, \quad n=1,\dots,N-1$$

Ισότητα φανταστικών μερών $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\left\{\int_\Omega |\nabla U^{n+1}|^2 dx - \int_\Omega |\nabla U^{n-1}|^2 dx\right\} = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |U^n|^2 (|U^{n+1}|^2 - |U^{n-1}|^2)\, dx, \quad n=1,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla U^{n+1}|^2 dx - \lambda \int_\Omega |U^{n+1}|^2 |U^n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla U^{n-1}|^2 dx - \lambda \int_\Omega |U^n|^2 |U^{n-1}|^2 dx, \quad n=1,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla U^{n+1}|^2 dx + \int_\Omega |\nabla U^n|^2 dx - \lambda \int_\Omega |U^{n+1}|^2 |U^n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla U^n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla U^{n-1}|^2 dx - \lambda \int_\Omega |U^n|^2 |U^{n-1}|^2 dx, \quad n=1,\dots,N-1.$$

$\blacksquare$

η οποία οδηγεί στο ζητούμενο

**Σύγκλιση:** $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$ στη διακριτή $L^2(\Omega)$ νόρμα $\|\cdot\|_{\Delta x}$ με περιοδικές συνοριακές συνθήκες (P-G-V 1995).