LESSON 2

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 3/4/2020 , zoom meeting 17.00-19.00.

Πηγή: Γ. Ακρίβης & Β. Δουγαλής, Αριθμητικές Μέθοδοι για ΣΔΕ, Β΄ Έκδοση

§7.3, §7.4.

Αυτόματη επιλογή διαμέρισης

Στο περασμένο μάθημα κατασκευάσαμε a posteriori εκτιμήσεις για το σφάλμα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, οι οποίες έχουν τη μορφή:

$$\nu(u-u_H) \leq \left(\sum_{j=0}^{J-1} d_j \, (x_{j+1}-x_j)^{b}\right)^{1/2} = E$$ "εκτιμητής" σφάλματος

όπου: $\nu(u-u_H) = \|u-u_H\| := \left(\int_\alpha^b |u-u_H|^2\right)^{1/2}$ και $b=4$, ή $\nu(u-u_H) = \left(\int_\alpha^b |u'-u_H'|^2 dx\right)^{1/2}$ και $b=2$. Επιπλέον: $d_j \geq 0$ για $j=0,\dots,J-1$.

Ας δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω εκτίμηση για να "βελτιώσουμε" την επιλογή της διαμέρισης.

Η <u>βασική ιδέα</u> είναι ότι βλέπουμε την παραπάνω εκτίμηση ως κατανομή του σφάλματος σε κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης; δηλ.

θεωρούμε την ποσότητα: $\underbrace{d_j \, (x_{j+1}-x_j)^{b}}_{E_j}$ ως τη συνεισφορά στο σφάλμα του $\underline{[x_j, x_{j+1}]}$.

Έστω $TOL>0$ ένας μικρός θετικός αριθμός, π.χ $TOL = 10^{-5}$, που αντιπροσωπεύει το επίπεδο σφάλματος που θέλουμε να επιτύχουμε, δηλ. $\nu(u-u_H) \leq TOL$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν:

$$E \leq TOL.$$

Ένας τρόπος για να το επιτύχουμε αυτό είναι να έχουμε:

$$d_j\,(x_{j+1}-x_j)^{b-1} \leq \frac{TOL^2}{(b-a)}\,,\ j=0,\dots,J-1.$$

Πράγματι τότε έχουμε ότι:

$$E = \Big(\sum_{j=0}^{J-1} d_j\,(x_{j+1}-x_j)^{b}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{j=0}^{J-1} \frac{TOL^2}{(b-a)}\,(x_{j+1}-x_j)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq TOL\,\Big(\sum_{j=0}^{J-1} \frac{(x_{j+1}-x_j)}{b-a}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq TOL\,\Big(\frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{J-1}(x_{j+1}-x_j)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq TOL\,\Big[\frac{1}{b-a}\;b-a\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq TOL.$$

Αυτό γίνεται με μία επαναληπτική διαδικασία:

$\longrightarrow$ π.χ. ομοιόμορφη με J υποδιαστήματα.

Βημα 1: Διαλέγουμε μια αρχική διαμέριση $(x_j^{(0)})_{j=0}^{J(0)}$ του $[\alpha, b]$ και υπολογίζουμε

το a posteriori σφάλμα $E^{0} := \left(\sum_{j=0}^{J^{(0)}-1} d_j^{(0)} (x_{j+1}^{(0)} - x_j^{(0)})^{b}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Όταν $E^{(0)} \leq TOL$ τότε σταματάμε.

Όταν $E^{(0)} > TOL$ τότε ορίζουμε ένα σύνολο δεικτών: $A^{(0)} \subset \{0, \dots, J^{(0)}-1\}$

ως εξής:

$$A^{(0)} := \left\{ j \in \{0, \dots, J^{(0)}-1\} : \ d_j^{(0)} (x_{j+1}^{(0)} - x_j^{(0)})^{b-1} > \frac{TOL^2}{(b-\alpha)} \right\}.$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε μία νέα διαμέριση $(x_j^{(1)})_{j=0}^{J^{(1)}}$ η οποία αποτελείται

από τους κόμβους $(x_j^{(0)})_{j=0}^{J^{(0)}}$ και νέους κόμβους: $\dfrac{x_j^{(0)} + x_{j+1}^{(0)}}{2}$ για κάθε $j \in A^{(0)}$.

Επομένως η νέα διαμέριση θα έχει: $\underbrace{card(A^{(0)})}_{\text{πλήθος στοιχείων του } A^{(0)}} + J^{(0)} + 1$ κόμβους δηλ. $J^{(1)} = J^{(0)} + card(A^{(0)})$

Βήμα 2. Για $m \in \mathbb{N}$. υπολογίζουμε: το σφάλμα $E^{(m)} = \left(\sum_{j=0}^{J^{(m)}-1} d_j^{(m)} (x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)})\right)^{\frac{1}{2}}$ και

όταν $E^{(m)} \leq TOL$ τότε σταματάμε, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία

του προηγούμενου βήματος.

Στην πράξη αυτή η διαδικασία "δουλεύει" δηλαδή τερματίζει.

Για να είναι πλήρης η ανάλυση σχετικά με τη "σύγκλιση" μιας τέτοιας διαδικασίας πρέπει: να αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος τερματίζει δηλ. υπάρχει $m^*(\mathrm{TOL})$ τ.ω. $E^{(m^*(\mathrm{TOL}))} \leq \mathrm{TOL}$. Αυτό είναι γενικά αντικείμενο έρευνας στα τελευταία 30 χρόνια και συχνά δημοσιεύονται παραλλαγές της "adaptive" διαδικασίας ώστε ο αλγόριθμος επιλογής βήματος να έχει επιπλέον ιδιότητες που μπορούν να βοηθήσουν στην ανάλυσή του.

Επίσης ένα χρήσιμο αποτέλεσμα είναι ότι $E \leq C\,\Delta x$ όταν $V(v)=\|v\|$ και $E \leq C\,\Delta x^2$ όταν $V(v)=\|v\|$. Αυτό εξασφαλίζει ότι οι a posteriori εκτιμητές έχουν τη σωστή τάξη, δηλ. είναι σύμφωνοι με την αντίστοιχη a priori εκτίμηση.

Μια παραλλαγή της διαδικασίας που περιγράψαμε περιλαμβάνει τη λεγόμενη "αραίωση" αυτό γίνεται ως εξής:

$$\text{αν} \quad d_j^{(m)}\left(x_{j+1}^{(m)}-x_j^{(m)}\right)^{\beta-1} < \frac{\mathrm{TOL}^2}{(\beta\alpha)}\cdot 10^{-L} \quad \text{και} \quad d_{j+1}^{(m)}\left(x_{j+2}^{(m)}-x_{j+1}^{(m)}\right)^{\beta-1} < \frac{\mathrm{TOL}}{(\beta\alpha)}\,10^{-L}$$

τότε φαίνεται ότι το σφάλμα είναι πιο μικρό από όσο χρειαζόμαστε οπότε μπορούμε να ενοποιήσουμε τα $[x_j^{(m)}, x_{j+1}^{(m)}]$ και $[x_{j+1}^{(m)}, x_{j+2}^{(m)}]$ σε ένα διάστημα.

Φυσικά υπάρχει ο κίνδυνος το νέο διάστημα να παράγει περισσότερο σφάλμα από ότι θα θέλαμε γι' αυτό αυτή η τεχνική δεν εφαρμόζεται πάντα.

Ένα μη ορισμένο πρόβλημα

Έστω: $u \in C^2([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ λύση του προβλήματος:

$$-u''+qu=f \quad \text{στο } [\alpha,\beta]$$
$$u(\alpha)=u(\beta)=0$$

όπου: $q\in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ και $f\in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. Εδώ δεν υποθέτουμε ότι: $q\geq 0$ δηλ. επιτρέπουμε η q να έχει αρνητικές τιμές, όμως υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Υπενθυμίζουμε ότι η υπόθεση $q\geq 0$ χρησιμοποιήθηκε για να δείξουμε ότι ο πίνακας της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων είναι θ.ο. αλλά και για να εξασφαλίσουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος.

Διατυπώνουμε ξανά τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων: αναζητούμε $u_H\in H$ τ.ω.

$$\mathcal{B}(u_h,\varphi)=(f,\varphi)\quad \forall\varphi\in H$$

όπου: $$\mathcal{B}(v,w)=\int_\alpha^\beta v'w'\,dx+\int_\alpha^\beta qvw\,dx \quad \forall v,w\in C_p^1([\alpha,\beta];\mathbb{R})$$

και $$(v,w)=\int_\alpha^\beta vw\,dx \quad \forall v,w\in L^2(\alpha,\beta).$$

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ:

1) υπάρχει η u_H ?

2) συγκλίνει η u_H στο u όταν $\Delta x = \max_{0\le j\le J-1} |x_{j+1}-x_j| \to 0$?

Εδώ η διγραμμική μορφή είναι φραγμένη δηλ. υπάρχει σταθερά $C_B \geq 0$ τ.ω.

$$|\mathcal{B}(v,w)| \leq \overbrace{\max\{1, \max_{[\alpha,b]}|q|\}}^{C_B} \|v\|_1 \|w\|_1 \quad \forall v,w \in C^1_p([\alpha,b])$$

όμως δεν υπάρχει σταθερά $C_E > 0$ τ.ω. $\mathcal{B}(v,v) \geq C_E \|v\|_1^2 \quad \forall v \in C^1_p([\alpha,b])$

αλλά ισχύει ότι υπάρχουν σταθερές $C_1, C_2 > 0$ τ.ω.

$$\mathcal{B}(v,v) + C_1\|v\|^2 \geq C_2 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in C^1_p([\alpha,b])$$

η οποία καλείται «ανισότητα Gårding». Αυτή προκύπτει ως εξής:

$v \in C^1_p([\alpha,b];\mathbb{R})$

$$\mathcal{B}(v,v) + C_1\|v\|^2 = \int_\alpha^b (v')^2\,dx + \int_\alpha^b q v^2\,dx + C_1\int_\alpha^b v^2\,dx$$

Διαλέγουμε $C_1 > \max_{[\alpha,b]}|q| + 1$

$$\geq \int_\alpha^b (v')^2\,dx + \int_\alpha^b (\underbrace{\max_{[\alpha,b]}|q| + q}_{\geq 0} + 1)\, v^2\,dx$$

$$\geq \int_\alpha^b (v')^2\,dx + \int_\alpha^b v^2\,dx = \|v\|_1^2.$$

$\boxed{\text{δηλ. } C_2 = 1}$

Για το πρόβλημα δύο σημείων υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ υπάρχει μοναδική λύση u. Τότε από τη θεωρία διαφορικών εξισώσεων υπάρχει $C_I \geq 0$ η οποία εξαρτάται από το διάστημα $[\alpha,\beta]$ και είναι τέτοια ώστε:

$$\|u\|_2 \leq C_I \|f\|$$

όπου:
$$\|u\|_2 = \left[\int_\alpha^\beta (v^2 + (v')^2 + (v'')^2)\, dx \right]^{1/2}.$$

Το αποτέλεσμα ορθογωνιότητας Galerkin ισχύει καθώς:

$$\mathcal{B}(u,\varphi) = (f,\varphi) \qquad \forall \varphi \in H$$
$$\mathcal{B}(u_H,\varphi) = (f,\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{B}(u-u_H,\varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in H$$

2.8

Σύμφωνα με την ανισότητα Gårding που αποδείξαμε έχουμε:

$$\|u-u_H\|_1^2 \leq \mathcal{B}(u-u_H, u-u_H) + C_1 \|u-u_H\|^2$$

$$\overset{G\text{-}ort}{\leq} \mathcal{B}(u-u_H, u) + C_1 \|u-u_H\|^2$$

$$\leq \mathcal{B}(u-u_H, u-\varphi) + C_1 \|u-u_H\|^2 \quad \forall \varphi \in H.$$

$$\leq C_B \|u-u_H\|_1 \|u-\varphi\|_1 + C_1 \|u-u_H\|^2 \quad \forall \varphi \in H.$$

$$\leq C_B \|u-u_H\|_1 \|u-I_H u\|_1 + C_1 \|u-u_H\|^2$$

θέτουμε: $\varphi = I_H u$ $\downarrow$ interpolant της u

$$\leq C \Delta x \|u''\| \, \|u-u_H\|_1 + C_1 \|u-u_H\|^2.$$

I

Επιστρέφουμε στο τέχνασμα Nitsche:

$$-w'' + qw = u - u_H \quad \text{στο } [\alpha, \beta]$$

$$w(\alpha) = w(\beta) = 0 .$$

όπου: $\|w\|_2 \leq c_I \|u - u_H\| .$

Έτσι: $\|u - u_H\|^2 = \mathcal{B}(w, u - u_H)$

$$= \mathcal{B}(u - u_H, w - I_h w) \qquad \leftarrow \text{Galerkin orthogonality}$$

$$\leq C_B \|u - u_H\|_1 \|w - I_H w\|_1$$

$$\leq C \, \Delta x \|u - u_H\|_1 \|w''\|$$

$$\leq C \cdot \Delta x \|u - u_H\|_1 \|u - u_H\| .$$

Άρα: $\|u - u_H\| \leq C_\Gamma \Delta x \|u - u_H\|_1 .$ (I)

Από τις (I) και (II) έπεται:

$$\|u-u_H\|_1^2 \leq C\,\Delta x\,\|u''\|\,\|u-u_H\|_1 + C_1 C_T^2 \Delta x^2\,\|u-u_H\|_1^2$$

$$\Rightarrow (1-C_T^2 C_1 \Delta x^2)\,\|u-u_H\|_1^2 \leq C\,\Delta x\,\|u''\|\,\|u-u_H\|_1$$

$$\Rightarrow (1-C_T^2 C_1 \Delta x^2)\,\|u-u_H\|_1 \leq C\,\Delta x\,\|u''\|$$

Απαιτώντας $C_T^2 C_1 \Delta x^2 \leq 1/2$ έπεται:

$$\|u-u_H\|_1 \leq C\,\Delta x\,\|u''\| \qquad (III)$$

Έτσι (III) και (I) δίνουν:

$$\|u-u_H\| \leq C\,\Delta x^2\,\|u''\|$$

A.H. Schatz, Math. Comp. vol 28 (1974), 959–962.

HELMHOLTZ