LESSON 3

Τρίτη 8/4/2020, zoom meeting, 17.00-19.00

Γ. Ζωγράφης

# Ένα μη ορισμένο πρόβλημα (Β' μέρος)

Έστω $u \in C^2([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ λύση του προβλήματος:

$$-u'' + qu = f \quad \text{στο } [\alpha,\beta]$$

$$u(\alpha) = u(\beta) = 0$$

όπου: $q \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ και $f \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$.

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων διατυπώνεται ως εξής:

βρές $u_H \in H$ τ.ω.

$$\mathcal{B}(u_H,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in H$$

όπου:

$$\mathcal{B}(v,w) := \int_\alpha^\beta v'w'\,dx + \int_\alpha^\beta q v w\,dx \quad \forall v,w \in C_p^1([\alpha,\beta];\mathbb{R})$$

$$(v,w) := \int_\alpha^\beta v w\,dx \quad \forall v,w \in L^2(\alpha,\beta).$$

Θα ασχοληθούμε με το ερώτημα της ύπαρξης και μοναδικότητα της προσέγγισης $u_H$.

Επειδή ο $H$ είναι χώρος συναρτήσεων με πεπερασμένη διάσταση, υπάρχει μια βάση $\{\varphi_j\}_{j=1}^{M_H}$ του $H$ όπου $M_H = dim(H)$. Επομένως η αναζήτηση του $u_H$ ανάγεται στην εύρεση $(\lambda_j^H)_{j=1}^{M_H} \subset \mathbb{R}$ τ.ω

$$\mathcal{B}\Big(\sum_{j=1}^{M_H} \lambda_j^H \varphi_j\,,\, \varphi\Big) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in H$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{M_H} \lambda_j^H\, \mathcal{B}(\varphi_j,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in H$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{M_H} \lambda_j^H\, \mathcal{B}(\varphi_j,\varphi_i) = (f,\varphi_i)\,, \quad i=1,\dots,M_H.$$

Αν $b_i = (f,\varphi_i)$, $i=1,\dots,M_H$,

$A_{ij} = (\varphi_j,\varphi_i)$, $1 \le i,j \le M_H$, $\lambda = (\lambda_1^H,\dots,\lambda_{M_H}^H) \in \mathbb{R}^{M_H}$,

τότε καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα: $A\lambda = b$. Από τη γραμμική άλγεβρα είναι γνωστό ότι: ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, ανν, $Ker(A)=0$. Έστω: $x \in Ker(A)$. Τότε: $Ax=0$, και επομένως έχουμε τα ακόλουθα:

$$\sum_{j=1}^{M_H} A_{ij} x_j = 0\,, \; i=1,\dots,M_H \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B}\Big(\sum_{j=1}^{M_H} x_j \varphi_j\,,\, \varphi_i\Big) = 0\,, \; i=1,\dots,M_H$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{B}\Big(\sum_{j=1}^{M_H} x_j\varphi_j, \varphi\Big) = 0 \quad \forall \varphi \in H \qquad (\mathrm{I})$$

Ας ορίσουμε: $v = \sum_{j=1}^{M} x_j \varphi_j$. Τότε: $\mathcal{B}(v,\varphi)=0 \ \forall\varphi\in H$. Ουσιαστικά,

αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $v=0$, το οποίο σημαίνει $\sum_{j=1}^{M_H} x_j\varphi_j = 0$, από την οποία έπεται $x_j=0$, $j=1,\dots,M_H$, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $(\varphi_j)_{j=1}^{M_H}$.

Σύμφωνα με την ανισότητα Gårding που ικανοποιεί η $\mathcal{B}$ έχουμε

$$\|v\|_1^2 \le \mathcal{B}(v,v) + c_1\|v\|^2$$

$$\boxed{\text{Εδώ: } \mathcal{B}(v,v)=0 \text{ διότι } v\in H \ (\text{βλ. (I)})}$$

$$\le c_1\|v\|^2$$

Εφαρμόζοντας ξανά το τέχνασμα του Nitsche, έπεται:

$$-w''+qw=v \quad \text{στο } [\alpha,\beta],$$
$$w(\alpha)=w(\beta)=0.$$

όπου: $\|w\|_2 \le C_I\|v\|$.

Έτσι: $$\|v\|^2 = \mathcal{B}(w,v) = \mathcal{B}(v,w) = \mathcal{B}(v,w-I_Hw) + \overbrace{\mathcal{B}(v,I_Hw)}^{=0}$$

$$\le C_B\|w-I_Hw\|_1\|v\|_1 \le C\Delta x\|w''\|\,\|v\|_1$$

$$\le C\Delta x\|v\|\cdot\|v\|_1.$$

Άρα υπάρχει: $\hat{C}_T>0$ τ.ω. $\|v\| \le \hat{C}_T\Delta x\|v\|_1$.

Οι παραπάνω ανισότητες δίνουν:

$$\|V\|_1^2 \leq C_1 C_\Gamma^2 \Delta x^2 \|V\|_1^2$$

$$\Rightarrow \quad (1 - C_1 C_\Gamma^2 \Delta x) \|V\|_1^2 \leq 0$$

Απαιτώντας: $C_1 C_\Gamma^2 \Delta x < 1$ έχουμε: $\|V\|_1 \leq 0 \Rightarrow V = 0$.

Άρα η απαίτηση $C_1 C_\Gamma^2 \Delta x < 1$ εξασφαλίζει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και επομένως η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων $u_H$ υπάρχει και είναι μοναδική.

## Μια ημιγραμμική εξίσωση θερμότητας:

Ας δούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση μιας ημιγραμμικής εξίσωσης της θερμότητας χρησιμοποιώντας την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων στη χωρική μεταβλητή.

Έστω $T>0$ και $u:[0,T]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τ.ω.

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) + f(u(t,u)) \quad \forall t\in(0,T]\ \forall x\in(\alpha,\beta),$$

$$u(t,\alpha)=u(t,\beta)=0 \quad \forall t\in(0,T],$$

$$u(0,x)=v(x) \quad \forall x\in[\alpha,\beta],$$

όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με φραγμένη $1^{\eta}$ παράγωγο, δηλ. $\sup_{\mathbb{R}}|f'|\leq c$. Για την απόδειξη σύγκλισης θα χρειαστούμε η $u$ να έχει συγκεκριμένη ομαλότητα που θα την αναφέρουμε αργότερα.

Κατασκευή της μεθόδου πεπ. στοιχείων Έστω $(x_j)_{j=0}^{J}$ οι κόμβοι μιας διαμέρισης του $[\alpha,\beta]$, δηλ. $x_0=\alpha$, $x_J=\beta$, $x_j<x_{j+1}$ για $j=0,\dots,J-1$, και $H$ ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων:

$$H=\{\varphi\in C([\alpha,\beta];\mathbb{R}) : \varphi|_{[x_j,x_{j+1}]}\in \mathbb{P}^1[x_j,x_{j+1}],\ j=0,\dots,J-1,\ \varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0\}$$

για τον οποίο έχουμε δείξει ότι:

$$\|g-I_H g\|\leq C\,\Delta x^2\,\|g''\| \quad \forall g\in C^2([\alpha,\beta];\mathbb{R}) \text{ με } g(\alpha)=g(\beta)=0$$

$$\|g-I_H g\|_1\leq C\,\Delta x\,\|g''\| \quad \Delta x=\max_{0\leq j\leq J-1}(x_{j+1}-x_j)$$

Επειδή $H \subset C^1_p([\alpha,\beta];\mathbb{R})$, αν πάρουμε τυχαία $\varphi \in H$ και πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ΜΔΕ με $\varphi$ και ολοκληρώσουμε στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta \partial_t u\, \varphi\, dx = \int_\alpha^\beta \partial_x^2 u\, \varphi\, dx + \int_\alpha^\beta f(u)\, \varphi\, dx$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \partial_t u\, \varphi\, dx = -\int_\alpha^\beta \partial_x u\, \varphi'\, dx + \int_\alpha^\beta f(u)\, \varphi\, dx$$

$$\Rightarrow (u_t, \varphi) = -(\partial_x u, \varphi') + (f(u), \varphi)$$

, όπου: $(\tilde{v},\tilde{w}) := \int_\alpha^\beta \tilde{v}\,\tilde{w}\, dx \quad \forall \tilde{v},\tilde{w} \in L^2(\alpha,\beta)$.

Έτσι "διακριτοποιήσαμε" το πρόβλημα ως προς τη χωρική μεταβλητή $x$, όπως έγινε στο πρόβλημα δύο σημείων.
Για να διακριτοποιήσουμε το πρόβλημα ως προς τη μεταβλητή $t$, δρούμε ως στην περίπτωση των πεπερασμένων διαφορών, διαλέγοντας μία μέθοδο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συστήματα ΣΔΕ. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε την προσαρμογή της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler.

Έστω $N \in \mathbb{N}$, μια διαμέριση του $[0,T]$ με κόμβους $(t_n)_{n=0}^N$ δηλ. $t_0=0$, $t_N=T$, $t_n<t_{n+1}$ για $n=0,\dots,N-1$.
Στη συνέχεια ορίζουμε: $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ για $n=1,\dots,N$, και $\Delta t := \max_{1\le n\le N} \Delta t_n$.

Παίρνουμε τη ΜΔΕ για $t=t_{n+1}$. Έτσι:

$$u_t(t_{n+1},x) = u_{xx}(t_{n+1},x) + f(u(t_{n+1},x)).$$

Για να προσεγγίσουμε τον όρο $u_t(t_{n+1},x)$ με τιμές της $u(t,x)$ στους χρονικούς κόμβους. χρησιμοποιούμε τον τύπο TAYLOR ως εξής:

$$u(t_n,x) = u(t_{n+1},x) + (t_n - t_{n+1})\, u_t(t_{n+1},x) + \int_{t_{n+1}}^{t_n} (t_n - s)\, u_{tt}(s,x)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad u(t_n,x) = u(t_{n+1},x) - \Delta t_{n+1}\, u_t(t_{n+1},x) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)\, u_{tt}(s,x)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad u_t(t_{n+1},x) = \frac{u(t_{n+1},x) - u(t_n,x)}{\Delta t_{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)\, u_{tt}(s,x)\, ds}_{R_1^n}$$

Έτσι: $$\frac{u(t_{n+1},x) - u(t_n,x)}{\Delta t_{n+1}} = u_{xx}(t_{n+1},x) + f(u(t_{n+1},x)) + R_1^n(x)$$ (←

Αν πολ/σουμε με $\varphi \in H$ και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και ολοκληρώσουμε στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε.

$$\left(\frac{u(t_{n+1},\cdot)-u(t_n,\cdot)}{\Delta t_{n+1}},\varphi\right) = -\left(\partial_x u(t_{n+1},\cdot),\varphi'\right) + \left(f(u(t_{n+1},\cdot)),\varphi\right) + \left(R_1^n,\varphi\right) \quad \forall \varphi \in H$$

Επειδή ο όρος $f$ είναι μη γραμμικός ως προς $u$ (γενικά), σημαίνει ότι το $u(t_{n+1},\cdot)$ στην παραπάνω σχέση συνδέεται με μη γραμμικό τρόπο. Για να το αποφύγουμε αυτό κάνουμε "γραμμικοποίηση" δηλ. $f(u(t_{n+1},\cdot)) \approx f(u(t_n,\cdot))$. Ας δούμε πιό είναι το "σφάλμα" λόγω της γραμμικοποίησης:

Τότε:
$$f(u(t_{n+1},x)) = f(u(t_n,x)) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f'(u(s,x))\, u_t(s,x)\, ds}_{R_2^n(x)}.$$

Έτσι καταλήγουμε στην σχέση:

$$\left(\frac{u(t_{n+1},\cdot)-u(t_n,\cdot)}{\Delta t_{n+1}},\varphi\right) = -\left(\partial_x u(t_{n+1},\cdot),\varphi'\right) + \left(f(u(t_n,\cdot)),\varphi\right) + \left(R_1^n+R_2^n,\varphi\right)$$

$$\forall \varphi \in H$$

(3.9.

## Μέθοδος 1:

ΒΗΜΑ 1: $U^0 = I_H v$ ή $\underbrace{(U^0,\varphi)=(v,\varphi)}\ \ \forall \varphi\in H$

$U^0$ η $L^2$-προβολή της $v$ στον $H$

Γενικά το $U^0$ είναι μία προσέγγιση της αρχικής συνθήκης $v$ από τον $H$.

ΒΗΜΑ 2 (επαναληπτικό)

Για $n=0,\dots,N-1$, βρίσκουμε $U^{n+1}\in H$ τ.ω.

$$\left(\frac{U^{n+1}-U^{n}}{\Delta t_{n+1}},\varphi\right) = -\mathcal{B}(U^{n+1},\varphi) + (f(U^{n}),\varphi) \quad \forall \varphi\in H$$

όπου: $\mathcal{B}(\tilde{v},\tilde{w}) := +\int_a^b \tilde{v}'\tilde{w}'\,dx \quad \forall\, \tilde{v},\tilde{w}\in C^1_p([a,b];\mathbb{R})$

Στο επαναληπτικό βήμα το $U^{n+1} = \sum_{j=1}^{M_H} \lambda_j^{n+1} \varphi_j$ όπου $(\varphi_j)_{j=1}^{M_H}$ μία βάση του $H$,

$M_H = \dim H$ και $(\lambda_j^{n+1})_{j=1}^{M_H} \subset \mathbb{R}$ προσδιορίζονται από γραμμικό σύστημα:

$$\sum_{j=1}^{M_H} \underbrace{\left[(\varphi_j,\varphi_i) + \Delta t_{n+1} B(\varphi_j,\varphi_i)\right]}_{A_{ij}} \lambda_j^{n+1} = \underbrace{(u^n,\varphi)_i + \Delta t_{n+1}(f(U^n),\varphi)_i}_{b_i}, \quad i=1,\dots,M_H.$$

Ο πίνακας $A$ είναι ο Gram πίνακας που αντιστοιχεί στο εσωτερικό γινόμενο

$$\gamma(\hat{v},\tilde{w}) = (v,w) + \Delta t_{n+1}(v',w') \qquad \forall v,w \in C^1_p([\alpha,\beta];\mathbb{R})$$

και στη βάση $(\varphi_j)_{j=1}^{M_H}$ του $H$. Άρα ο $A$ είναι συμμετρικός και Θ.Ο.

Άρα ο $A$ αντιστρέψιμος.

Σημείωση: Πιο συγκεκριμένα: $A_{ij} = \gamma(\varphi_j,\varphi_i)$ $i,j=1,\dots,M_H$. Επομένως: για κάθε $y \in \mathbb{R}^{M_H}$ έχουμε: $y^T A y = \gamma\left(\sum_{j=1}^{M_H} y_j\varphi_j, \sum_{j=1}^{M_H} y_j\varphi_j\right) = \left\|\sum_{j=1}^{M_H} y_j\varphi_j\right\|^2 + \Delta t_{n+1} \left\|\left(\sum_{j=1}^{M_H} y_j\varphi_j\right)'\right\|^2 \geq 0$. Επιπλέον,

$y^T A y = 0 \Rightarrow \left\|\sum_{j=1}^{M_H} y_j\varphi_j\right\|^2 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{M_H} y_j\varphi_j = 0 \Rightarrow y_j = 0, j=1,\dots,M_H$. Έτσι ο $A$ είναι Θ.Ο.

# Εκτίμηση σφάλματος στην $L^2$

Σε σχέση με τη μέθοδο πεπ. διαφορών έχουμε ένα περιορισμό.

Ας τον ελαχιστοποιήσουμε:

Έχουμε ήδη

$$\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t_{n+1}}, \varphi\right) + \mathcal{B}(u^{n+1}, \varphi) = (f(u^n), \varphi) + (R_1^n + R_2^n, \varphi)$$

$\forall \varphi \in H$

και $\left(\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t_{n+1}}, \varphi\right) + \mathcal{B}(U^n, \varphi) = (f(U^n), \varphi)$ $\quad n=0,\dots,N-1,$

όπου: $u^m := u(t_m, \cdot)$ για $m=0,\dots,N$. Ας ορίσουμε τα σφάλματα:

$$e^m := u^m - U^m \quad \text{για } m=0,\dots,N.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έπεται:

$$\left(\frac{e^{n+1}-e^{n}}{\Delta t_{n+1}}, \varphi\right) + \mathcal{B}(e^{n+1}, \varphi) = \left(f(u^{n}) - f(U^{n}), \varphi\right) + \left(R_1^{n} + R_2^{n}, \varphi\right) \quad \forall \varphi \in H.$$

$\boxed{\text{ERROR EQUATION}}$

Εδώ δεν μπορούμε να θέσουμε: $\varphi = e^{m}$ διότι: $e^{m} \notin H$. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα η ιδέα είναι να κατασκευάσουμε μία προσέγγιση $Eu(t,\cdot) \in H$ της $u(t,\cdot)$ για fix $t \in [0,T]$, από τον $H$ και στη συνέχεια να εκτιμήσουμε τα σφάλματα $u^{m} - Eu^{m}$, $Eu^{m} - U^{m}$ χωριστά. Δηλ.

$$e^{m} = \underbrace{\left(u^{m} - Eu^{m}\right)}_{\rho^{m}} + \underbrace{\left(Eu^{m} - U^{m}\right)}_{\vartheta^{m}} \qquad m = 0, \dots, N.$$

Για κάθε $w \in C_p^1([\alpha,\beta];\mathbb{R})$, η $E w \in H$. (3.13

καταςκευάζεται ως τη προβολή της $w$ στον $H$

$$\int_\alpha^\beta (Ew)'\varphi'\,dx = \int_\alpha^\beta w'\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in H$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B}(Ew,\varphi) = \mathcal{B}(w,\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

Λόγω Poincaré-Friedrich ~~το~~ $\gamma(\tilde{v},\tilde{w}) = \int_\alpha^\beta \tilde{v}'\tilde{w}'\,dx \quad \forall v,w \in C_p^1([\alpha,\beta])$

είναι εσωτερικό γινόμενο στο $C_p^1([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. Άρα η παραπάνω

απαίτηση οδηγεί στον γραμμικό σύστ.

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{M_H}\end{pmatrix} = b \qquad b_i = (w,\varphi_i),\ i=1,\dots,M_H$$

$$A_{ij} = \mathcal{B}(\varphi_j,\varphi_i) = \gamma(\varphi_j,\varphi_i),\ i,j=1,\dots,M_H$$

Άρα η ελλειπτική προβολή $E w \in H$ ορίζεται για κάθε $w \in C_p^1([\alpha,\beta];\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Εδώ ο } A \text{ είναι θ.ο και συμμετρικός. Έτσι αντιστρέφεται.}}$