"Αριθμητική Λύση ΜΔΕ"

Lesson 4

Παρασκευή 10/4/2020, 17.00-19.00, skype meeting.

Γ. Ζωράρης.

Ελλειπτική προβολή στον H (ή H^1-προβολή στον H).

• Έστω $E: C^1_p([\alpha,\beta],\mathbb{R}) \to H$ όπου: $\mathcal{B}(Ew,\varphi)=\mathcal{B}(w,\varphi)\ \forall \varphi\in H$. Έχουμε ήδη δείξει ότι η E είναι καλά ορισμένη. Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το σφάλμα $Ew-w$ όταν $w\in X=\{g\in C^2[\alpha,\beta] : g(\alpha)=g(\beta)=0\}$.

• Έστω $w\in X$. Επειδή $\mathcal{B}(Ew,\varphi)=\mathcal{B}(w,\varphi)\ \forall\varphi\in H$ έπεται: $\underbrace{\mathcal{B}(Ew-w,\varphi)=0}_{H^1\text{-ορθογωνιότητα}}\ \forall\varphi\in H$

Για απλούστευση θέτουμε: $e=Ew-w$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\|e'\|^2=\mathcal{B}(e,e)&=\mathcal{B}(e,Ew-w)\\
&=\underbrace{\mathcal{B}(e,Ew)}_{0}-\mathcal{B}(e,w)\\
&=\mathcal{B}(e,-w)+\overbrace{\mathcal{B}(e,I_Hw)}^{0}\\
&=\mathcal{B}(e,I_Hw-w)\\
&\le \|e'\|\,\|(w-I_Hw)'\|\\
&\le \|e'\|\,C\Delta x\,\|w''\|.
\end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση: $\|e'\|\le C\Delta x\|w''\|$. Μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε το σφάλμα e στην $L^2(\alpha,\beta)$ νόρμα $\|\cdot\|$. Εδώ χρησιμοποιούμε ξανά το τέχνασμα του Nitsche. Έστω $\psi\in X^2([\alpha,\beta];\mathbb{R})$

τ.ω. $\quad -\psi''=e$, $\ \psi(\alpha)=\psi(\beta)=0$. Έτσι: $\|e\|^2=-\int_\alpha^\beta\psi''e\,dx=\int_\alpha^\beta\psi'e'\,dx=\mathcal{B}(e,\psi)$

$$\begin{aligned}
&=\mathcal{B}(e,\psi-I_H\psi)+\underbrace{\mathcal{B}(e,I_H\psi)}_{0}\\
&\le\|e'\|\cdot\|(\psi-I_H\psi)'\|\\
&\le\|e'\|\cdot C\Delta x\,\|\psi''\|.
\end{aligned}$$

$$\leq C \cdot \Delta x \cdot \Delta x \|W''\| \cdot \|\varphi''\|$$

$$\leq C \Delta x^2 \|W''\| \; \|e\|$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$\|e\| \leq C \Delta x^2 \|W''\|.$$

Εκτίμηση σφάλματος για τη μέθοδο (γραμμικά) πεπλεγμένη Euler / πεπερασμένων στοιχείων.

ΒΗΜΑ 1: $U^0 \in H$ προσέγγιση της αρχικής συνθήκης v

ΒΗΜΑ 2: Για $m=0,\dots,N-1$, βρίσκουμε $U^m \in H$ τ.ω.

$$\left(\frac{U^{m+1}-U^m}{\Delta t_{m+1}}, \varphi\right) = -B(U^{m+1},\varphi) + (f(U^m),\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

Έπειτα δείξαμε ότι:

$$(I) \quad \left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}, \varphi\right) = -B(u^{m+1},\varphi) + (f(u^m),\varphi) + (R_1^m + R_2^m, \varphi) \quad \forall \varphi \in H, \; m=0,\dots,N-1,$$

όπου: $u^m := u(t_m,\cdot)$ για $m=0,\dots,N$, $R_1^m := \frac{1}{\Delta t_{m+1}} \int_{t_m}^{t_{m+1}} (s-t_m)\, u_{tt}(s,x)\, ds$ για $m=0,\dots,N-1$,

και $R_2^m := \int_{t_m}^{t_{m+1}} f'(u(s,x))\, u_t(s,x)\, ds$ για $m=0,\dots,N-1$.

Ορίζουμε: $\rho^m(\cdot) := \underbrace{u(t^m,\cdot)}_{u^m} - Eu(t^m,\cdot)$ για $m=0,\dots,N$, και $\vartheta^m := E\underbrace{u(t^m,\cdot)}_{u^m} - U^m$ για $m=0,\dots,N$.

Έτσι: $e^m := \underbrace{u(t^m,\cdot)}_{u^m} - U^m = \rho^m + \vartheta^m$ για $m=0,\dots,N$.

Θα εκτιμήσουμε πρώτα τα σφάλματα $\vartheta^m \in H$ για $m=0,\dots,N$.

Για να γίνει αυτό διαμορφώνουμε τις αντίστοιχες "error equations":

$$\left(\frac{\vartheta^{m+1}-\vartheta^m}{\Delta t_{m+1}},\varphi\right) + \mathcal{B}(\vartheta^{m+1},\varphi) = \left[\left(\frac{Eu^{m+1}-Eu^m}{\Delta t_{m+1}},\varphi\right) + \mathcal{B}(Eu^{m+1},\varphi)\right]$$
$$- \left[\left(\frac{U^{m+1}-U^m}{\Delta t_{m+1}},\varphi\right) + \mathcal{B}(U^{m+1},\varphi)\right]$$

[Με βάση τον ορισμό είναι εύκολο να δείξουμε ότι η E είναι γραμμική.]

$$= \left(E\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right),\varphi\right) + \mathcal{B}(E(u^{m+1}),\varphi) - (f(U^m),\varphi)$$

$$= \left(E\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right),\varphi\right) + \mathcal{B}(u^{m+1},\varphi) - (f(U^m),\varphi)$$

(4.4)

$$\underline{\underline{(\mathrm{I})}} \quad \left(E\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right), \varphi\right) - (f(U^m), \varphi)$$

$$-\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}, \varphi\right) + (f(u^m), \varphi) + (R_1^m + R_2^m, \varphi)$$

$$= \underbrace{(R_1^m + R_2^m, \varphi)}_{T_1^m} + (\underbrace{f(u^m) - f(U^m)}_{T_2^m}, \varphi) + (\underbrace{E\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right) - \left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right)}_{T_3^m}, \varphi), \quad m = 0, \ldots, N-1.$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left(\frac{\vartheta^{m+1}-\vartheta^m}{\Delta t_{m+1}}, \varphi\right) + \mathcal{B}(\vartheta^{m+1}, \varphi) = (T_1^m + T_2^m + T_3^m, \varphi), \quad m = 0, \ldots, N-1.$$

Θέτουμε $\varphi = \vartheta^{m+1}$ στην παραπάνω σχέση:

$$(\vartheta^{m+1} - \vartheta^m, \vartheta^{m+1}) + \Delta t_{m+1} \|(\vartheta^{m+1})'\|^2 = ((T_1^m + T_2^m + T_3^m), \vartheta^{m+1})$$

$$\Rightarrow \|\vartheta^{m+1}\|^2 + \Delta t_{m+1} \|(\vartheta^{m+1})'\|^2 = (\vartheta^m, \vartheta^{m+1}) + \Delta t_{m+1} \|T_1^m + T_2^m + T_3^m\| \, \|\vartheta^{m+1}\|$$

$$\leq \|\vartheta^m\| \, \|\vartheta^{m+1}\| + \Delta t_{m+1} \left(\|T_1^m\| + \|T_2^m\| + \|T_3^m\|\right)$$

$m = 0, \ldots, N-1$

Επομένως:

$$\|\vartheta^{m+1}\|^2 \leq \|\vartheta^{m}\| \|\vartheta^{m+1}\| + \Delta t_{m+1} \left(\|T_1^m\| + \|T_2^m\| + \|T_3^m\|\right) \|\vartheta^{m+1}\|$$

$m=0,\dots,N-1,$

$$\Rightarrow \|\vartheta^{m+1}\| \leq \|\vartheta^{m}\| + \Delta t_{m+1} \left(\|T_1^m\| + \|T_2^m\| + \|T_3^m\|\right),$$

$m=0,\dots,N-1.$

Για $m=0,\dots,N-1$, έχουμε:

$$\|T_3^m\| = \left\| E\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right) - \frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}} \right\|$$

$$= \left\| E\left[\int_{t_m}^{t_{m+1}} u(s,\cdot)\,ds\right] - \int_{t_m}^{t_{m+1}} u(s,\cdot)\,ds \right\| \Delta t_{m+1}^{-1}$$

$$\leq C \Delta x^2 \Delta t_{m+1}^{-1} \left\| \int_{t_m}^{t_{m+1}} \partial_x^2 u(s,\cdot)\,ds \right\|$$

$$\leq C \Delta x^2 \Delta t_{m+1}^{-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_x^2 (s,\cdot)\|\,ds.$$

$$\|T_2^m\| = \| f(u^m) - f(\bar{u}^m)\|$$

$$= \left(\int_\alpha^\beta | f(u^m(x)) - f(\bar{u}^m(x))|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$= \left[\int_\alpha^\beta (f'(\theta_x u^m(x) + (1-\theta_x)\bar{u}^m(x))^2 (u^m - \bar{u}^m)^2 \, dx \right]^{1/2}$$

$$\leq \sup_{\mathbb{R}} |f'| \, \| u^m - \bar{u}^m \|$$

$$\leq \sup_{\mathbb{R}} |f'| \, (\|\rho^m\| + \|\vartheta^m\|).$$

(4.6

$$\|T_1^m\| \leq \|R_1^m\| + \|R_2^m\|$$

$$\leq \frac{1}{\Delta t_{m+1}} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\underbrace{(s-t_m)}_{\leq \underbrace{(t_{m+1}-t_m)}_{\Delta t_{m+1}}} u_{tt}(s,\cdot)\| \, ds + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|f'(u(s,\cdot))\, u_t(s,\cdot)\| \, ds$$

$$\leq \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|u_{tt}(s,\cdot)\| \, ds + \sup_{\mathbb{R}} |f'| \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|u_t(s,\cdot)\| \, ds \, .$$

Error:
$$\|\vartheta^{m+1}\| \leq \|\vartheta^m\| + \Delta t_{m+1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(\|u_{tt}\| + \sup_{\mathbb{R}} |f'| \, \|u_t\|\right) ds$$

$$+ \, C \Delta x^2 \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_x^2 u\| \cdot ds$$

$$+ \, \Delta t_{m+1} \sup_{\mathbb{R}} |f'| \left(\|\rho^m\| + \|\vartheta^m\|\right) \quad , m = 0, \cdots, N-1$$

$$\Rightarrow \quad \|\vartheta^{m+1}\| \leq (1+\sup|f'|\,\Delta t_{m+1})\,\|\vartheta^m\| + C\,\Delta x^2 \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_x^2 u\|\,ds$$

$$+ \Delta t_{m+1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(\|u_{tt}\| + \sup_{\mathbb{R}}|f'|\,\|u_t\|\right) ds$$

$$+ C \sup_{\mathbb{R}}|f'|\,\Delta t_{m+1}\,\Delta x^2\,\|\partial_x^2 u^m\|, \quad m=0,\ldots,N-1.$$

Ας γράψουμε τη σχέση ως εξής:

$$\alpha_{m+1} \leq (1+\tilde{C}\,\Delta t_{m+1})\,\alpha_m + b_m,$$

$$\leq e^{\tilde{C}\Delta t_{m+1}}\,\alpha_m + b_m, \quad m=0,\ldots,N-1.$$

$$\boxed{e^x \geq 1+x,\ x\geq 0} \qquad \boxed{\tilde{C} := \sup_{\mathbb{R}}|f'|}$$

$m=0 \qquad \alpha_1 \leq e^{\tilde{C}\Delta t_1}\alpha_0 + b_0$

$m=1 \qquad \alpha_2 \leq e^{\tilde{C}\Delta t_2}\alpha_1 + b_1$

$\leq e^{\tilde{C}(\Delta t_1+\Delta t_2)}\alpha_0 + e^{\tilde{C}\Delta t_2} b_0 + b_1$

$m=2 \qquad \alpha_3 \leq e^{\tilde{C}\Delta t_3}\alpha_2 + b_2$

$\leq e^{\tilde{C}(\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3)}\alpha_0 + e^{\tilde{C}(\Delta t_2+\Delta t_3)} b_0 + e^{\tilde{C}\Delta t_3} b_1 + b_2$

Claim: $\alpha_m \leq e^{\tilde{C}(\Delta t_1+\cdots+\Delta t_m)}\left(\alpha_0 + \sum_{\ell=0}^{m-1} b_\ell\right), \quad m=1,\dots,N,$

$\boxed{\text{Μαθηματική Επαγωγή}}$ (induction)

$m=1 \qquad \alpha_1 \leq e^{\tilde{C}(\Delta t_1)}\alpha_0 + b_0 e^{\tilde{C}t_1}$

$\alpha_{m+1} \leq e^{\tilde{C}\Delta t_{m+2}}\alpha_{m+1} + b_{m+1} \leq e^{\tilde{C}\Delta t_{m+2}}\, e^{\tilde{C}(\Delta t_1+\cdots+\Delta t_m)}\left(\alpha_0 + \sum_{\ell=0}^{m-1} b_\ell\right)$

$+ b_{m+1}$

$$\leq e^{C(\Delta t_1 + \dots + \Delta t_{m+2})}\left(\alpha_0 + \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell\right).$$

δηλ.

$$\boxed{\alpha_m \leq e^{C t_m}\left(\alpha_0 + \sum_{\ell=0}^{m-1} b_\ell\right) \quad m=1,\dots,N}$$

Διακριτό λήμμα Grönwall

Έτσι

$$\|\vartheta^m\| \leq e^{\sup|f'| t_m}\Big(\|\vartheta^0\| + C\Delta x^2 \sum_{\ell=0}^{m-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \|\partial_x^2 u\|\, ds$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{m-1} \Delta t_{\ell+1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (\|u_{tt}\| + \tilde{C}\, \|u_t\|)\, ds$$

$$+ C\Delta x^2 \sum_{\ell=0}^{m-1} \Delta t_{\ell+1} \|\partial_x^2 u^\ell\|\Big), \quad m=0,\dots,N.$$

(4.11)

$$\|\vartheta^m\| \leq e^{\sup|f'|\, t_m}\Big(\|\vartheta^0\| + C\Delta x^2 \int_0^T \|\partial_x^2 u\| ds$$

$$+ \Delta t \int_0^T (\|u_{tt}\| + \sup_{\mathbb{R}} |f'| \, \|u_t\|) ds$$

$$+ C\Delta x^2 \cdot T \cdot \max_{[0,T]} \|\partial_x^2 u\|\Big), \quad m = 0, \dots, N.$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$\|\vartheta^0\| = \|U^0 - Eu^0\| = \|U^0 - Ev\|$$

$$\leq \underbrace{\|v - Ev\|}_{C\Delta x^2 \|v''\|} + \|v - U^0\|$$

αν $U^0 = I_H v$ τότε: $\|v - U^0\| \leq C\Delta x^2 \|v''\|$

αν $U^0 = Eu^0$ τότε: $\|\vartheta^0\| = 0$.

αν $(U^0, \varphi) = (v, \varphi)$ $\forall \varphi \in H$ δηλ. U^0 η L^2 προβολή του v στον H,

τότε: $\|U^0 - v\| \leq \|v - I_H v\|$

$\leq C\Delta x^2 \|v''\|$.