ΑΛΔΕ

Μ. Τρίτη 14/4/2020

5μμ - 7μμ.

5η εξ' αποστάσεως

διάλεξη

(zoom)

1. Διατύπωση προβλήματος:

$$u_t = u_{xx} + f(u) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta),\ \forall t \in (0,T]$$

$$u(t,\alpha) = u(t,\beta) = 0 \qquad \forall t \in (0,T]$$

$$u(0,x) = v(x) \qquad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Υποθέτουμε ότι: $v(\alpha) = v(\beta) = 0$ για να είναι η u συνεχής στο $Q = [0,T] \times [\alpha, \beta]$.
Επιπλέον υποθέτουμε ότι: $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ με $\sup_{\mathbb{R}} |f'| < +\infty$. Για την u υποθέτουμε ότι:
$u \in C^{1,2}_{t,x}(Q)$ και επομένως χρειαζόμαστε $v \in C^2([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. Θα χρειαστούμε επιπλέον ομαλότητα αργότερα.

2. Γραμμικοποιημένη πεπλεγμένη Euler μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων.

Βήμα 1: $U_0 \in H$ μία προσέγγιση της αρχικής τιμής v. Η U_0 μπορεί να είναι ο interpolant $I_H v$, η ελλειπτική προβολή Ev, η L^2-προβολή Pv με: $(Pv, \varphi) = (v, \varphi)$ $\forall \varphi \in H$.

Βήμα 2: Για $m = 0, \dots, N-1$, βρίσκουμε $U^{m+1} \in H$ τ.ω.

$$\left(\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t_{m+1}}, \varphi \right) + \mathcal{B}(U^{m+1}, \varphi) = (f(U^m), \varphi), \quad \forall \varphi \in H,$$

όπου: $\mathcal{B}(\tilde{v}, \tilde{w}) := (\tilde{v}', \tilde{w}')$ για κάθε $\tilde{v}, \tilde{w} \in C^1_p([\alpha,\beta];\mathbb{R})$.

3. Εκτίμηση σφάλματος: Δείξαμε ότι: $\max_{0 \le m \le N} \| U^m - u^m \| \le C(\Delta t + \Delta x^2)$, όπου $u^m = u(t_m, \cdot)$ και

C μια σταθερά που εξαρτάται από την u. Χρειαστήκαμε: $u \in C^{2,2}_{t,x}(Q)$ για το σφάλμα συνέπειας.

4 <u>ΕΡΩΤΗΜΑ</u>: Είναι απαραίτητο να κατασκευάζουμε μία αρχική προσέγγιση $U^0 \in H$ της v καθώς η αρχική τιμή $u(0,\cdot)$ είναι γνωστή και άρα δεν υπάρχει λόγος να προσεγγισθεί. Με άλλα λόγια θα ήταν πιο λογικό να είχαμε μία μέθοδο η οποία να επιτρέπει: $U^0 = v$.

<u>Απάντηση</u>: Η αλήθεια είναι ότι στη βιβλιογραφία (βλ. π.χ. V. Thomée, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems) δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη αναφορά. Ας υποθέσουμε ότι $U^0 = Pu^0$ και $f \equiv 0$. Τότε στο Βήμα 2 για $m=0$ έχουμε:

$$\left(\frac{U^1 - U^0}{\Delta t_1}, \varphi\right) + B(U^1, \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (U^1, \varphi) + \Delta t_1 B(U^1, \varphi) = (U^0, \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad (U^1, \varphi) + \Delta t_1 B(U^1, \varphi) = (Pv, \varphi) = (v, \varphi), \qquad \forall \varphi \in H.$$

Άρα στην πράξη δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε την Pv (για την οποία απαιτείται η λύση ενός γραμμικού συστήματος).

Στην ημιγραμμική περίπτωση έχουμε:

$$\left(\frac{U^1-U^0}{\Delta t_1}, \varphi\right) + \mathcal{B}(U^1,\varphi) = (f(U^0),\varphi) \qquad \forall \varphi \in H$$

$$\Rightarrow \quad (U^1,\varphi) + \Delta t_1 \mathcal{B}(U^1,\varphi) = (U^0,\varphi) + \Delta t_1 (f(U^0),\varphi) \quad \forall \varphi \in H$$

$$\Rightarrow \quad (U^1,\varphi) + \Delta t_1 \mathcal{B}(U^1,\varphi) = (Pv,\varphi) + \Delta t_1 (f(Pv),\varphi)$$

$$= (v,\varphi) + \Delta t_1 (f(Pv),\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

Εδώ υπάρχει η ανάγκη υπολογισμού της Pv. Ας τροποποιήσουμε την μεταβολική μορφή ως εξής:

$$\left(\frac{U^1-U^0}{\Delta t_1}, \varphi\right) + \mathcal{B}(U^1,\varphi) = (f(v),\varphi) \quad \forall \varphi \in H$$

Έτσι δεν χρειάζεται να υπολογιστεί η Pv. Ας δούμε τι αλλάζει στην εκτίμηση σφάλματος.

(5.4

Δεν αλλάζει κάτι όταν, $1 \le m \le N-1$, όπως έχουμε:

$$\|\vartheta^{m+1}\| \le \left(1+\sup_{\mathbb{R}}|f'|\,\Delta t_{m+1}\right)\|\vartheta^m\| + C\,\Delta x^2 \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_x^2 \partial_t u\|\,ds$$

$$+ \Delta t_{m+1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(\|u_{tt}\| + \sup_{\mathbb{R}}|f'|\,\|u_t\|\right) ds \qquad (\mathrm{I})$$

$$+ C \sup_{\mathbb{R}}|f'|\,\Delta t_{m+1}\,\Delta x^2\,\|\partial_x^2 u^m\|, \quad m = 1, \dots, N-1.$$

Μένει να δούμε τι μπορούμε να κάνουμε για $m=0$. Έστω: $\vartheta^0 = Ev - U^0 = Ev - v \notin H$. Τότε:

$$\left(\frac{\vartheta^1 - \vartheta^0}{\Delta t_1}, \varphi\right) + \mathcal{B}(\vartheta^1, \varphi) = \left[\left(\frac{Eu^1 - Ev}{\Delta t_1}, \varphi\right) + \mathcal{B}(Eu^1, \varphi)\right] - \left[\left(\frac{U^1 - v}{\Delta t_1}, \varphi\right) + \mathcal{B}(U^1, \varphi)\right]$$

$$= \left(E\left(\frac{u^1 - v}{\Delta t_1}\right), \varphi\right) + \mathcal{B}(u^1, \varphi) - (f(v), \varphi)$$

$$= \left(E\left(\frac{u^1 - v}{\Delta t_1}\right), \varphi\right) - \left(\frac{u^1 - u^0}{\Delta t_1}, \varphi\right) + (R_1^0 + R_2^0, \varphi)$$

$$= \left(E\left(\frac{u^1 - u^0}{\Delta t_1}\right) - \left(\frac{u^1 - u^0}{\Delta t}\right), \varphi\right) + (R_1^0 + R_2^0, \varphi)$$

Έτσι θέτοντας $\varphi = \vartheta^1$ και εφαρμόζοντας την ανισότητα C-S, έπεται·

$$\|\vartheta^1\| \le \|\vartheta^0\| + \underbrace{\Delta t_1\left(\|R_1^0\| + \|R_2^0\|\right)}_{\int_{t_0}^{t_1} \|u_{tt}(s,\cdot)\|\, ds \,+\, \sup_{\mathbb{R}} |f'| \int_{t_0}^{t_1} \|u_t(s,\cdot)\|\, ds} + \underbrace{\Delta t_1 \left\| E\left(\frac{u^1-u^0}{\Delta t_1}\right) - \left(\frac{u^1-u^0}{\Delta t}\right) \right\|}_{\le C\Delta x^2 \int_{t_0}^{t_1} \|\partial_x^2 \partial_t u\|\, ds} \qquad (\#)$$

$$\boxed{\|\vartheta^0\| = \|U^0 - Ev\| = \|v - Ev\| \le C\, \Delta x^2 \|v''\|}$$

Ο συνδυασμός των (Ζ) και (ΙΙ) και το διακριτό λήμμα Gronwall δίνει ανάλογη εκτίμηση για το σφάλμα $\max_{0 \le m \le N} \|U^m - u^m\| \le C(\Delta t + \Delta x^2)$.

Crank-Nicolson-type / finite elemet method

Η προηγούμενη μέθοδος είναι 1ης τάξης ως προς Δt και 2ης τάξης ως προς Δx και χρησιμοποιείται όταν η λύση του προβλήματος δεν έχει μεγάλη ομαλότητα. Ο γενικός κανόνας είναι ότι μεγάλη ομαλότητα σημαίνει περισσότερους όρους στον τύπο Taylor και επομένως μεγαλύτερο περιθώριο σχεδιασμού μιας μεθόδου μεγαλύτερης τάξης.

Για να κατασκευάσουμε μια μέθοδο 2ης τάξης ως πρός Δt θα βασιστούμε στην μέθοδο Crank-Nicolson που έχουμε ήδη στο πλαίσιο των πεπερασμένων διαφορών. Έστω μια διαμέριση $(t_n)_{n=0}^{N}$ του $[0,T]$ με $t_0=0, t_N=T$, $t_n < t_{n+1}$ για $n=0,\dots,N-1$. Επιπλέον, θέτουμε $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ για $n=1,\dots,N$, και $\Delta t = \max\limits_{1\le n\le N} \Delta t_n$. Παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση για $t=t_n$ και $t=t_{n+1}$, τις προσθέτουμε κατά μέλη και διαιρούμε με 2 κατά μέλη έτσι:

Έτσι:

$$\underbrace{\frac{u_t(t_{n+1},\cdot)+u_t(t_n,\cdot)}{2}}_{\text{έχουμε έχουμε παράγωγο ως προς } t} = \underbrace{\frac{\partial_x^2 u(t_{n+1},\cdot)+\partial_x^2 u(t_n,\cdot)}{2}}_{\text{ok !}} + \underbrace{\frac{f(u(t_{n+1},\cdot))+f(u(t_n,\cdot))}{2}}_{\text{μη γραμμική εξάρτηση από το } u(t_{n+1},\cdot)} \quad , n=0,\dots,N-1.$$

Έστω κάποια συνάρτηση: $\varphi : C^3([0,T];\mathbb{R})$ Τότε με βάση τον τύπο Taylor έχουμε:

$$\varphi'(t_{n+1}) = \varphi'(t_{n+1/2}) + (t_{n+1}-t_{n+1/2})\varphi''(t_{n+1/2}) + \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)\,\varphi'''(s)\,ds.$$

$$\varphi'(t_n) = \varphi'(t_{n+1/2}) + (t_n-t_{n+1/2})\varphi''(t_{n+1/2}) + \int_{t_{n+1/2}}^{t_n} (t_n-s)\,\varphi'''(s)\,ds.$$

Έτσι: $$\varphi'(t_{n+1})+\varphi'(t_n) = 2\varphi'(t_{n+1/2}) + \left[\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)\,\varphi'''(s)\,ds + \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (s-t_n)\,\varphi'''(s)\,ds\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'(t_{n+1})+\varphi'(t_n)}{2} = \varphi'(t_{n+1/2}) + \frac{1}{2}\left[\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)\,\varphi'''(s)\,ds + \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (s-t_n)\,\varphi'''(s)\,ds\right]$$

$$\varphi(t_{n+1}) = \varphi(t_{n+1/2}) + \overbrace{(t_{n+1}-t_{n+1/2})}^{\Delta t_{n+1}/2}\,\varphi'(t_{n+1/2}) + (t_{n+1}-t_{n+1/2})^2\,\varphi''(t_{n+1/2}) + \frac{1}{2}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^2\,\varphi'''(s)\,ds$$

$$\varphi(t_n) = \varphi(t_{n+1/2}) + \underbrace{(t_n-t_{n+1/2})}_{-\frac{\Delta t_{n+1}}{2}}\,\varphi'(t_{n+1/2}) + (t_n-t_{n+1/2})^2\,\varphi''(t_{n+1/2}) + \frac{1}{2}\int_{t_{n+1/2}}^{t_n} (t_n-s)^2\,\varphi'''(s)\,ds$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$\varphi(t_{n+1}-\varphi(t_n)) = \Delta t_{n+1}\,\varphi'(t_{n+1/2}) + \frac{1}{2}\left[\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^2\,\varphi'''(s)\,ds + \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n-s)^2\,\varphi'''(s)\,ds\right].$$

Έτσι:

$$\varphi'(t_{n+1/2}) = \frac{\varphi(t_{n+1})-\varphi(t_n)}{\Delta t_{n+1}} - \frac{1}{2\Delta t_{n+1}}\left[\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^2\,\varphi'''(s)\,ds + \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n-s)^2\,\varphi'''(s)\,ds\right].$$

Τελικά:

$$\frac{\varphi'(t_{n+1})+\varphi'(t_n)}{2} = \frac{\varphi(t_{n+1})-\varphi(t_n)}{\Delta t_{n+1}} + R_1^n(\varphi)$$

$$R_1^n(\varphi) := \frac{1}{2}\left[\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)\,\varphi'''(s)\,ds + \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (s-t_n)\,\varphi'''(s)\,ds\right] - \frac{1}{2\Delta t_{n+1}}\left[\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^2\,\varphi'''(s)\,ds + \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n-s)^2\,\varphi'''(s)\,ds\right]$$

(5.9

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \left[(t_{n+1}-s) - \frac{(t_{n+1}-s)^2}{\Delta t_{n+1}}\right] \varphi'''(s)\,ds + \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \left[(s-t_n) - \frac{(t_n-s)^2}{\Delta t_{n+1}}\right] \varphi''(s)\,ds \right].$$

Άρα:

$$\frac{u_t(t_{n+1},\cdot)+u_t(t_n,\cdot)}{2} = \frac{u(t_{n+1},\cdot)-u(t_n,\cdot)}{\Delta t_{n+1}} + \tilde{R}_1^n(\cdot)$$

$$\tilde{R}_1^n(x) = R_1^n(u(\cdot,x))$$

Ας δούμε τι μπορούμε να κάνουμε με τον μη γραμμικό όρο: Μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση: $\frac{f(u(t_{n+1},\cdot))+f(u(t_n,\cdot))}{2} \approx f(u(t_{n+1/2},\cdot))$, όπου $\varphi(t) = f(u(t,\cdot))$

$$\frac{f(u(t_{n+1},\cdot))+f(u(t_n,\cdot))}{2} = f(u(t_{n+1/2},\cdot)) + \tilde{R}_2^n$$

$$\tilde{R}_2 = \frac{1}{2}\left[\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)\,(f(u))_{ss}\,ds + \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (s-t_n)\,(f(u))_{ss}\,ds \right].$$

Γραμμική περίπτωση ($f=0$)

ΒΗΜΑ 1: $U^0 \in H$ προσέγγιση του V

ΒΗΜΑ 2: Για $m=0,\dots,N-1$, βρες $U^{m+1} \in H$ τ.ω

$$\left(\frac{U^{m+1}-U^m}{\Delta t_{m+1}}, \varphi\right) + \mathcal{B}\left(\frac{U^{m+1}+U^m}{2}, \varphi\right) = 0 \quad \forall \varphi \in H$$

καθώς: $$\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial_x u^{m+1}+\partial_x u^m}{2}, \varphi'\right) = -(\tilde{R}_1^m, \varphi) \quad \forall \varphi \in H,\ m=0,\dots,N-1.$$

$$\underbrace{(U^{m+1},\varphi) + \frac{\Delta t_{m+1}}{2}\mathcal{B}(U^{m+1},\varphi)} = (U^m,\varphi) - \frac{\Delta t_{m+1}}{2}\mathcal{B}(U^m,\varphi)$$

ο πίνακας της πεπλεγμένης Euler

με $\frac{\Delta t_{m+1}}{2}$ αντί Δt_{m+1}, ο οποίος

είναι συμμ. και θ.ο.

Μη γραμμική περίπτωση $(f \neq 0)$

Βημα 1: $U^0 \in H$ προσέγγιση του V.

Βημα 2. Για $m=0,\dots,N-1$, βρες $U^{m+1/2} \in H$ τ.ω

Π. Euler στο $[t_m, t_{m+1/2}]$

$$\left(\frac{U^{m+1/2}-U^m}{\Delta t_{m+1/2}}, \varphi\right) + \mathcal{B}\left(\frac{U^{m+1/2}+U^m}{2}, \varphi\right) = \left(f(U^m), \varphi\right) \quad \forall \varphi \in H$$

και βρες $U^{m+1} \in H$ τ.ω

$$\left(\frac{U^{m+1}-U^m}{\Delta t_{m+1}}, \varphi\right) + \mathcal{B}\left(\frac{U^{m+1}+U^m}{2}, \varphi\right) = \left(f(U^{m+1/2}), \varphi\right) \quad \forall \varphi \in H$$

Εκτίμηση σφάλματος (γραμμική περίπτωση)

$$\vartheta^m := Eu^m - U^m \quad \text{για } m=0,\dots,N$$

$$\left(\frac{\vartheta^{m+1}-\vartheta^m}{\Delta t_{m+1}},\varphi\right) + \mathcal{B}\left(\frac{\vartheta^{m+1}+\vartheta^m}{2},\varphi\right) = \left[\left(E\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right),\varphi\right) + \mathcal{B}\left(E\left(\frac{u^{m+1}+u^m}{2}\right),\varphi\right)\right]$$

$$- \underbrace{\left[\left(\frac{U^{m+1}-U^m}{\Delta t_{m+1}},\varphi\right) + \mathcal{B}\left(\frac{U^{m+1}+U^m}{2},\varphi\right)\right]}_{0}$$

$$= \left(E\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right),\varphi\right) + \mathcal{B}\left(\frac{u^{m+1}+u^m}{2},\varphi\right)$$

$$= \left(\underbrace{E\left(\frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}\right) - \frac{u^{m+1}-u^m}{\Delta t_{m+1}}}_{z_1^m},\varphi\right) - \left(\tilde{R}_1^m,\varphi\right), \quad m=0,\dots,N-1.$$

Θέτουμε: $\varphi = \dfrac{\vartheta^{m+1}+\vartheta^m}{2}$ και έχουμε:

$$\left(\frac{\vartheta^{m+1}-\vartheta^{m}}{\Delta t_{m+1}}, \frac{\vartheta^{m+1}+\vartheta^{m}}{2}\right) + \underbrace{\mathcal{B}\left(\frac{\vartheta^{m+1}+\vartheta^{m}}{2}, \frac{\vartheta^{m+1}+\vartheta^{m}}{2}\right)}_{\geq 0} = \left(z_1^m, \frac{\vartheta^{m+1}+\vartheta^{m}}{2}\right) - \left(\tilde{R}_1^m, \frac{\vartheta^{m+1}+\vartheta^{m}}{2}\right), \quad m=0,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\Delta t_{m+1}}\left[\|\vartheta^{m+1}\|^2 - \|\vartheta^m\|^2\right] \leq \frac{1}{2}\left[\|z_1^m\| + \|\tilde{R}_1^m\|\right]\left(\|\vartheta^{m+1}\| + \|\vartheta^m\|\right), \quad m=0,\dots N-1$$

$$\Rightarrow \left(\|\vartheta^{m+1}\| - \|\vartheta^m\|\right)\left(\|\vartheta^{m+1}\| + \|\vartheta^m\|\right) \leq \Delta t_{m+1}\left(\|z_1^m\| + \|\tilde{R}_1^m\|\right)\left(\|\vartheta^{m+1}\| + \|\vartheta^m\|\right), \quad m=0,\dots N-1$$

$$\Rightarrow \|\vartheta^{m+1}\| \leq \|\vartheta^m\| + \Delta t_{m+1}\left(\|z_1^m\| + \|\tilde{R}_1^m\|\right), \quad m=0,\dots,N-1.$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{k}\|\vartheta^{m+1}\| \leq \sum_{m=0}^{k}\|\vartheta^m\| + \sum_{m=0}^{k}\Delta t_{m+1}\left(\|z_1^m\| + \|\tilde{R}_1^m\|\right), \quad k=0,\dots,N-1.$$

$$\Rightarrow \|\vartheta^{k+1}\| \leq \|\vartheta^0\| + \sum_{m=0}^{k}\Delta t_{m+1}\left(\|z_1^m\| + \|\tilde{R}_1^m\|\right) \quad k=0,\dots,N-1.$$

Άρα: $\boxed{\max_{0\leq k\leq N}\|\vartheta^k\| \leq \|\vartheta^0\| + \sum_{m=0}^{N-1}\Delta t_{m+1}\left(\|z_1^m\| + \|\tilde{R}_1^m\|\right).}$

$$\| Z_1^m \| \leq C\, \Delta x^2\, \Delta t_{m+1}^{-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \| \partial_x^2 \partial_t u(s,\cdot) \| \, ds$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \| Z_1^m \| \, \Delta t_{m+1} \leq C\, \Delta x^2 \sum_{m=0}^{N-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \| \partial_x^2 \partial_t u(s,\cdot) \| \, ds$$

$$\leq C\, \Delta x^2 \int_0^T \| \partial_x^2 \partial_t u(s,\cdot) \| \, ds$$

$$\| \tilde{R}_1^m \| \leq C\, \Delta t_{m+1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \| u_{ttt} \| \, ds$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \Delta t_{m+1} \| Z_1^m \| \leq C \sum_{m=0}^{N-1} (\Delta t_{m+1})^2 \int_{t_m}^{t_{m+1}} \| u_{ttt} \| \, ds$$

$$\leq C\, \Delta t^2 \int_0^T \| u_{ttt} \| \, ds.$$

Άρα: $$\max_{0 \leq k \leq N} \| \vartheta^k \| \leq \underbrace{\| \vartheta^0 \|} + C \left[\Delta t^2 \int_0^T \| u_{ttt} \| \, ds + \Delta x^2 \int_0^T \| \partial_x^2 \partial_t u(s,\cdot) \| \, ds \right].$$

$\hookrightarrow C\, \Delta x^2 \| v'' \|$ $\boxed{\text{π.χ. } U^0 = PV}$