ΑΠΔΕ

Διάλεξη 17 (εξ αποστάσεως)

Τρίτη 28/4/2020

5μμ-7μμ

(zoom)

Πηγή:

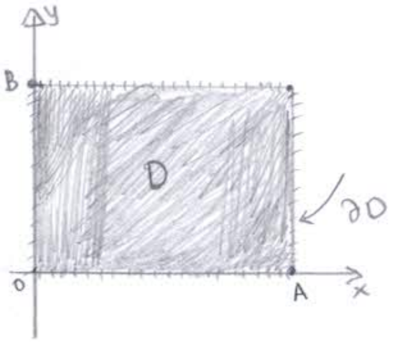
E. Isaacson and H.B. Keller,
Analysis of numerical methods,
Wiley, 1966.

## Εξισωση Poisson σε τετραγωνικο χωριο

Διαφορική εξίσωση Poisson

$$-\Delta u = f \quad \text{στο } D$$
$$u|_{\partial D} = g$$

Πρόβλημα σ.σ. Dirichlet




$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$$

Διδιάστατος διαφορικός τελεστής Laplace

$$D = [0,A] \times [0,B]$$
$$\mathring{D} = (0,A) \times (0,B)$$
$$\partial D = \left(\{0,A\} \times [0,B]\right) \cup \left([0,A] \times \{0,B\}\right)$$

$f : D \to \mathbb{R}$

$g : \partial D \to \mathbb{R}$

$D = [x_A, x_B] \times [y_A, y_B]$

$\tilde{x} = x - x_A, \quad \tilde{y} = y - y_B$

$\psi(\tilde{x},\tilde{y}) = u(\tilde{x}+x_A, \tilde{y}+y_B)$ για κάθε $(\tilde{x},\tilde{y}) \in [0, x_B - x_A] \times [0, y_B - y_A]$

Τότε:

$$-[\psi_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{y}) + \psi_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tilde{x},\tilde{y})]$$
$$= -\Delta u(\tilde{x}+x_A, \tilde{y}+y_B)$$
$$= f(\tilde{x}+x_A, \tilde{y}+y_B)$$

Όταν $g=0$, η θεωρία γενικευμένων λύσεων εγγυάται ότι το πρόβλημα έχει λύση $u \in H^2(D)$ όταν $f \in L^2(D)$. Μάλιστα μπορεί να γράψει κανείς τη λύση στη μορφή σειράς Fourier. Όταν $g \neq 0$ χρειαζόμαστε $g = w|_{\partial D}$ για κάποια $w \in H^2(D)$. Αυτή η ιδιότητα εκφράζεται με την απαίτηση $g \in H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$. Όταν $f \in C(D)$ και $g \in C^2(\partial D)$, τότε $u \in C^2(D)$.

### Μοναδικότητα λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών.

Μέθοδος Ενέργειας:

Έστω: $u_1, u_2 \in C^2(D)$ λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών και $w = u_1 - u_2$

Τότε: $-\Delta w = 0$ στο $D$. $\quad w|_{\partial D} = 0$

Έτσι $-\int_D \Delta w \cdot w \, dx dy \Rightarrow \int_D \Delta w \cdot w \, dx dy = 0$

$$\Rightarrow \int_D \left(\operatorname{div}(w \nabla w) - \underbrace{|\nabla w|^2}_{(u_x)^2 + (u_y)^2}\right) dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_D \operatorname{div}(w\nabla w)\,dx\,dy = \int_D |\nabla w|^2\,dx\,dy$$

① Gauss
$$\Rightarrow \int_D |\nabla w|^2\,dx\,dy = \int_{\partial D} (w\cdot\nabla w)\vec{n}\,ds = 0.$$

$$\Rightarrow \int_D |\nabla w|^2\,dx\,dy = 0 \overset{w\in C^2(D)}{\Rightarrow} \nabla w = 0 \text{ στο } D.$$

$$\Rightarrow w_x(x,y)=0 \text{ και } w_y(x,y)=0 \text{ στο } D$$

Έστω $x\in[0,A]$. Τότε $w_y(x,y)=0\ \forall y\in[0,B] \Rightarrow w(x,y)=c\ \forall y\in[0,B]$

$$\Rightarrow w(x,y)=w(x,0)=0\ \forall y\in[0,B]$$

Άρα: για κάθε $x\in[0,A],\ y\in[0,B]$ έχουμε: $w(x,y)=0$. Άρα $w\equiv 0 \Rightarrow u_1\equiv u_2$ ※

<u>Αρχή μεγίστου:</u>

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $\psi \in C^2(D)$ με $\Delta\psi = 0$. Τότε υπάρχουν σημεία $(x_A, y_A), (x_B, y_B) \in D$ τ.ω. $\psi(x_A, y_A) = \min\limits_{D} \psi$ και $\psi(x_B, y_B) = \max\limits_{D} \psi$.

<u>Σημ.</u> Όταν η ψ είναι σταθερή στο D, τότε $\Delta\psi = 0$ και φυσικά η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή λαμβάνονται παντού στο D, άρα και στο $\partial D$. Αυτό σημαίνει ότι η ψ μπορεί να λαμβάνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή <u>και</u> σε εσωτερικό σημείο του D, όμως όχι μόνο σε εσωτερικό σημείο του D.

<u>Απόδειξη:</u>

Για κάθε ε>0 ορίζουμε $w_\varepsilon(x,y) = \psi(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2) \quad \forall (x,y) \in D$.

Επειδή η $w_\varepsilon$ είναι συνεχής στο D και το D είναι κλειστό και φραγμένο, υπάρχει σημείο $(x_0, y_0) \in D$ τ.ω. $w_\varepsilon(x_0,y_0) = \max\limits_{(x,y)\in D} w_\varepsilon(x,y)$. Ας υποθέσουμε ότι το $(x_0,y_0)$ μπορεί να είναι <u>μόνο</u> εσωτερικό σημείο του D, δηλ. $\max\limits_{\partial D} w_\varepsilon < w_\varepsilon(x_0,y_0)$. Επειδή το $(x_0,y_0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου της $w_\varepsilon$ στο D και το $(x_0,y_0)$ εσωτερικό σημείο του D, έπεται ότι: $\nabla w_\varepsilon(x_0,y_0) = 0$ και $H_{w_\varepsilon}(x_0,y_0)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, δηλ. $z^T H_{w_\varepsilon}(x_0,y_0)\, z \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^2$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι:

$$H_{w_\varepsilon}(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 w_\varepsilon(x_0,y_0) & \partial_{xy} w_\varepsilon(x_0,y_0) \\ \partial_{xy} w_\varepsilon(x_0,y_0) & \partial_y^2 w_\varepsilon(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{xx}(x_0,y_0) + 2\varepsilon & \psi_{xy}(x_0,y_0) \\ \psi_{xy}(x_0,y_0) & \psi_{yy}(x_0,y_0) + 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

Αν $z=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ τότε:

$$0 \geq z^T H_{w_\varepsilon}(x_0,y_0)\, z = \psi_{xx}(x_0,y_0)+2\varepsilon$$

Αν $z=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ τότε:

$$0 \geq z^T H_{w_\varepsilon}(x_0,y_0)\, z = \psi_{yy}(x_0,y_0)+2\varepsilon.$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έπεται:

$$0 \geq \Delta\psi(x_0,y_0)+4\varepsilon \Rightarrow 0 \geq 4\varepsilon \quad \boxed{\text{Άτοπο}}$$

Άρα: $(x_0,y_0)\in \partial D$.

Επομένως έχουμε τα ακόλουθα:

$$w_\varepsilon(x,y) \leq w_\varepsilon(x_0,y_0) \qquad \forall (x,y)\in D,\ \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \psi(x,y)+\varepsilon\underbrace{(x^2+y^2)}_{\geq 0} \leq \psi(x_0,y_0)+\varepsilon(x_0^2+y_0^2) \quad \forall (x,y)\in D,\ \forall\varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) \leq \psi(x_0,y_0)+\varepsilon(x_0^2+y_0^2) \quad \forall (x,y)\in D,\ \forall\varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) \leq \max_{\partial D}\psi+\varepsilon(A^2+B^2) \quad \forall (x,y)\in D,\ \forall\varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \max_{D}\psi \leq \max_{\partial D}\psi+\varepsilon(A^2+B^2) \quad \forall\varepsilon>0.$$

Άρα παίρνοντας $\varepsilon \to 0$, έπεται:

$$\max_{D} \psi \leq \max_{\partial D} \psi$$

δηλ. η $\psi$ μπορεί να λάβει τη μέγιστη τιμή της στο $\partial D$.

Επειδή $\Delta(-\psi)=0$. Έπεται ότι: $\max_{D}(-\psi) \leq \max_{\partial D}(-\psi)$

$$\Rightarrow \quad -\min_{D} \psi \leq -\min_{\partial D} \psi \quad \Rightarrow \quad \min_{\partial D} \psi \leq \min_{D} \psi$$

δηλ. η $\psi$ μπορεί να λάβει την ελάχιστη τιμή της στο $\partial D$. $\square$

Ας αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης προβλήματος τιμών με βάση το προηγούμενο θεώρημα.

Έστω $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$, λύσεις του προβλήματος και $w = u_1 - u_2$. Τότε: $\Delta w = 0$, $w|_{\partial D} = 0$.

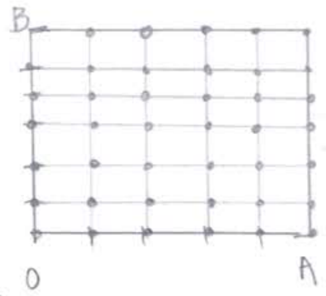
Άρα: $\max_{D} w \leq \max_{\partial D} w = 0$ και $\min_{D} w \geq \min_{\partial D} w = 0$

δηλ. $0 = \min_{D} w \leq w \leq \max_{D} w = 0$ στο $D$ $\Rightarrow$ $w=0$ στο $D$ $\Rightarrow$ $u_1 = u_2$.

Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.

Έστω $J_1, J_2 \overset{\geq 2}{\in} \mathbb{N}$ και:

$$\Delta x = \frac{A}{J_1}, \quad \Delta y = \frac{B}{J_2}$$



$x_j = A + j\Delta x, \quad j = 0, \dots, J_1$

$y_j = B + j\Delta y, \quad j = 0, \dots, J_2$

Ομοιόμορφη διαμέριση των $[0,A]$ και $[0,B]$ σε $J_1, J_2$ υποδιαστήματα αντίστοιχα.

Ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα δεικτών:

$I := \left\{(i,j): \begin{array}{l} i = 0, \dots, J_1 \\ j = 0, \dots, J_2 \end{array}\right\}$

$\overset{\circ}{I} := \left\{(i,j): \begin{array}{l} i = 1, \dots, J_1 - 1 \\ j = 1, \dots, J_2 - 1 \end{array}\right\}$

$\partial I := \left\{(i,j): \begin{array}{l} i \in \{0, J_1\} \text{ και } 0 \leq j \leq J_2 \\ \text{ή} \\ j \in \{0, J_2\} \text{ και } 0 \leq i \leq J_1 \end{array}\right\}$

Πλέγμα: $D_{\Delta x, \Delta y} = \{(x_j, y_k) : (j,k) \in I\}$. Εσωτερικό πλέγμα: $\overset{\circ}{D}_{\Delta x, \Delta y} = \{(x_j, y_k) : (j,k) \in \overset{\circ}{I}\}$.

Συνοριακό πλέγμα: $\partial D_{\Delta x, \Delta y} = \{(x_j, y_k) : (j,k) \in \partial I\}$.

Η ιδέα είναι να προσεγγίσουμε τους όρους $u_{xx}$ και $u_{yy}$ στα σημεία $(x_j, y_k) \in \overset{\circ}{D}_{\Delta x, \Delta y}$.

Εφαρμόζουμε τον τύπο Taylor ως προς τη μία μεταβλητή ως εξής.

$$u(x_{j-1}, y_k) = u(x_j, y_k) - \Delta x\, u_x(x_j, y_k) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x_j, y_k) - \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx}(x_j, y_k) + \frac{1}{6}\int_{x_j}^{x_{j-1}} (x_{j-1} - s)^3 u_{xxxx}(s, y_k)\, ds$$

$$u(x_{j+1}, y_k) = u(x_j, y_k) + \Delta x\, u_x(x_j, y_k) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x_j, y_k) + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx}(x_j, y_k) + \frac{1}{6}\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - s)^3 u_{xxxx}(s, y_k)\, ds$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$u(x_{j-1},y_k)+u(x_{j+1},y_k)-2u(x_j,y_k) = \overbrace{\frac{1}{6}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(s-x_{j-1})^3\,\partial_x^4 u(s,y_k)\,ds+\frac{1}{6}\int_{x_j}^{x_{j+1}}(x_{j+1}-s)^3\,\partial_x^4 u(s,y_k)\,ds}^{R^A_{j,k}}$$

$$+\ \Delta x^2\, u_{xx}(x_j,y_k)$$

Ανάλογα:

$$u(x_j,y_{k-1})-2u(x_j,y_k)+u(x_j,y_{k+1}) = \frac{1}{6}\int_{y_{k-1}}^{y_k}(s-y_{k-1})^3\,\partial_y^4 u(x_j,s)\,ds+\frac{1}{6}\int_{y_k}^{y_{k+1}}(y_{k+1}-s)^3\,\partial_y^4 u(x_j,s)\,ds \qquad (R^B_{j,k})$$

$$+\ \Delta y^2\, u_{yy}(x_j,y_k)$$

Έτσι:

$$-\Delta u(x_j,y_k) = -\frac{u(x_{j+1},y_k)-2u(x_j,y_k)+u(x_{j-1},y_k)}{\Delta x^2} - \frac{u(x_j,y_{k+1})-2u(x_j,y_k)+u(x_j,y_{k-1})}{\Delta y^2} + \underbrace{\frac{1}{\Delta x^2}R^A_{j,k}+\frac{1}{\Delta y^2}R^B_{j,k}}_{\text{consistency error}}$$

$1\le j\le J_1-1$

$1\le k\le J_2-1$

7.8.

<u>Διατύπωση μεθόδου.</u> Αναζητούμε πίνακα $U = \{U_{ij} : 0 \le i \le J_1, 0 \le j \le J_2\}$ τ.ω.

$$-\Delta_{\Delta x, \Delta y} U_{ij} := -\frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j), \quad \begin{matrix} 1 \le i \le J_1 - 1 \\ 1 \le j \le J_2 - 1 \end{matrix}$$

$$U_{ij} = g(x_i, y_j) \qquad \text{όταν } (i,j) \in \partial I.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} i = 0 \text{ ή } J_1 & \text{και} & 0 \le j \le J_2 \\ 0 \le i \le J_1 & \text{και} & j = 0, J_2 \end{matrix} \right\}.$$

Προκύπτει πίνακας $J \times J$ όπου $J = (J_1 - 1) \times (J_2 - 1)$. Θα δείξουμε αργότερα ότι ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός.

Ας δούμε κάποια διακριτά ανάλογα της αρχής μεγίστου, τα οποία θα μας επιτρέψουν να αποδείξουμε σύγκλιση στη διακριτή αρχή μεγίστου.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> A. Έστω πίνακας $V = \{V_{ij} : (i,j) \in I\}$ με $\Delta_{\Delta x, \Delta y} V_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in \mathring{I}$.

Τότε: $\max\limits_{(i,j)\in I} V_{ij} = \max\limits_{(i,j)\in \partial I} V_{ij}$. Ανάλογα, όταν $\Delta_{\Delta x, \Delta y} V_{ij} \leq 0 \ \forall (i,j) \in \mathring{I}$

τότε: $\min\limits_{(i,j)\in \partial I} V_{ij} = \min\limits_{(i,j)\in I} V_{ij}$.

<u>Σημ.</u> Όταν $\Delta_{\Delta x, \Delta y} V_{ij} \leq 0 \ \forall (i,j) \in \mathring{I}$ τότε $\Delta_{\Delta x \Delta y} (-V)_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in \mathring{I}$. Άρα

$$\max_{(i,j)\in I} (-V_{ij}) = \max_{(i,j)\in \partial I} (-V_{ij}) \Leftrightarrow -\min_{(i,j)\in I} V_{ij} = -\min_{(i,j)\in \partial I} V_{ij} \Leftrightarrow \min_{(i,j)\in I} V_{ij} = \min_{(i,j)\in \partial I} V_{ij}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>. Με βάση τη σημείωση αρκεί να αποδείξουμε το πρώτο σκέλος.

Πρώτα διαπιστώνουμε ότι:

$$\Delta_{\Delta x, \Delta y} V_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in I \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in I$$

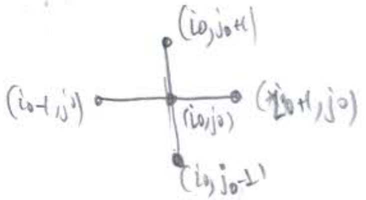
Έστω ότι $\max\limits_{(i,j)\in I} V_{ij} = V_{i_0,j_0}$ όπου $(i_0,j_0)\notin \partial I$ δηλ.

$$V_{i_0,j_0} > \max_{(i,j)\in \partial I} V_{ij}$$

Έτσι για $(i,j)=(i_0,j_0)$, έπεται:

$$\left(\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}\right) V_{i_0,j_0} \le \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{V_{i_0+1,j_0}+V_{i_0-1,j_0}}{2}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(\frac{V_{i_0,j_0+1}+V_{i_0,j_0-1}}{2}\right)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{\Delta x^2},\ \beta = \frac{2}{2\Delta y^2}}$$




$$\Leftrightarrow \quad V_{i_0,j_0} \le \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[\frac{V_{i_0+1,j_0}+V_{i_0-1,j_0}}{2}\right]+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left[\frac{V_{i_0,j_0+1}+V_{i_0,j_0-1}}{2}\right]$$

Αν κάποιο από τα $V_{i_0+1,j_0}, V_{i_0-1,j_0}, V_{i_0,j_0+1}, V_{i_0,j_0-1}$ είναι αυστηρά μικρότερο από $V_{i_0,j_0}$, τότε η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα: $V_{i_0,j_0} < V_{i_0,j_0}$, δηλ. άτοπο.

Άρα:

$$V_{i_0+1,j_0} = V_{i_0-1,j_0} = V_{i_0,j_0+1} = V_{i_0,j_0-1} = V_{i_0,j_0}.$$ Αν $(i_0+1,j_0)\in\partial I$

καταλήγουμε σε άτοπο διότι: $\max_{(i,j)\in\partial I} V_{ij} < V_{i_0,j_0}$. Αν δεν ισχύει επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με το σημείο $(i_0+1,j)$ αντί του $(i_0,j_0)$, καθώς $V_{i_0+1,j_0} = V_{i_0,j_0} = \max_{(i,j)\in I} V_{ij}$, και καταλήγουμε επαγωγικά στο συμπέρασμα ότι: $V_{i_0+\ell,j_0} = V_{i_0,j_0}$ για $\ell=0,\dots,J_1-i_0$. Έτσι $V_{i_0,j_0} = V_{J_1,j_0}$ που οδηγεί σε άτοπο διότι $(J_1,j_0)\in\partial I$. ∎

<u>Πρόταση</u> B: Έστω $V=\{V_{ij}: (i,j)\in I\}$. Τότε:

$$\max_{(i,j)\in I}|V_{ij}| \le \max_{(i,j)\in\partial I}|V_{ij}| + \frac{A^2}{2}\max_{(i,j)\in \mathring{I}} |(\Delta_{\Delta x,\Delta y}V)_{ij}|$$

<u>Απόδ.</u>

Εισάγουμε βοηθητική συνάρτηση $\Phi\in C^2(D)$ με: $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}x^2 \quad \forall (x,y)\in D$.

Έτσι: $0\le\varphi(x,y)\le \frac{1}{2}A^2 \quad \forall(x,y)\in D$. Επιπλέον, ορίζουμε πίνακα: $\Phi=(\Phi_{i,j})_{(i,j)\in I}$ με $\Phi_{ij}=\varphi(x_i,y_j) \quad \forall(i,j)\in I$. Τότε: $\Delta_{\Delta x,\Delta y}\Phi_{ij} = \frac{1}{2\Delta x^2}\left[(x_i+\Delta x)^2 - 2x_i^2 + (x_i-\Delta x)^2\right]$

$$= \frac{1}{2\Delta x^2}\left\{\cancel{x_i^2}+\Delta x^2+\cancel{2x_i\Delta x} - \cancel{2x_i^2} + \cancel{x_i^2} - \cancel{2\Delta x\, x_i}+\Delta x^2\right\} = \frac{2\Delta x^2}{2\Delta x^2} = 1 \quad \forall (i,j)\in\mathring{I}$$

Συν. $\Delta_{\Delta x,\Delta y}\Phi_{ij} = 1 \quad \forall (i,j)\in \mathring{I}$

Ορίζουμε:

$$V^+_{ij} = V_{ij} + \max_{(i,j)\in\mathring{I}} |\Delta_{\Delta x,\Delta y}V_{ij}|\cdot \Phi_{ij} \qquad \forall (i,j)\in I$$

και

$$V^-_{ij} = -V_{ij} + \max_{(i,j)\in\mathring{I}} |\Delta_{\Delta x,\Delta y}V_{ij}|\cdot \Phi_{ij} \qquad \forall (i,j)\in I.$$

Έτσι

$$\Delta_{\Delta x\Delta y}V^+_{ij} = \Delta_{\Delta x\Delta y}V_{ij} + \max_{(i,j)\in\mathring{I}} |\Delta_{\Delta x\Delta y}V_{ij}|\, \underbrace{\Delta_{\Delta x,\Delta y}\Phi_{ij}}_{1} \geq 0 \qquad \forall (i,j)\in\mathring{I}$$

και

$$\Delta_{\Delta x\Delta y}V^-_{ij} = -\Delta_{\Delta x\Delta y}V_{ij} + \max_{(i,j)\in\mathring{I}} |\Delta_{\Delta x\Delta y}V_{ij}|\cdot \underbrace{\Delta_{\Delta x\Delta y}\Phi_{ij}}_{1} \geq 0 \qquad \forall (i,j)\in\mathring{I}.$$

Η Πρόταση A, μας δίνει:

$$\max_{(i,j)\in I} \bar{V}^{+}_{ij} \leq \max_{(i,j)\in \partial I} V^{+}_{ij}$$

$$\leq \max_{(i,j)\in \partial I} V_{ij} + \max_{(i,j)\in \mathring{I}} |\Delta_{\Delta x \Delta y} V_{ij}| \frac{A^2}{2}$$

και

$$\max_{(i,j)\in I} \Delta_{\Delta x \Delta y} V^{-}_{ij} \leq \max_{(i,j)\in \partial I} (-V_{ij}) + \frac{A^2}{2} \max_{(i,j)\in \mathring{I}} |\Delta_{\Delta x \Delta y} V_{ij}|.$$

Έτσι·

$$\forall (i,j)\in I: \quad |V_{ij}| = \begin{cases} V_{ij} \\ -V_{ij} \end{cases} \leq \begin{cases} V^{+}_{ij} \\ V^{-}_{ij} \end{cases} \leq \begin{cases} \max_{(i,j)\in I} V^{+}_{ij} \\ \max_{(i,j)\in I} V^{-}_{ij} \end{cases} \leq \begin{cases} \max_{(i,j)\in \partial I} V_{ij} + \frac{A^2}{2} \max_{(i,j)\in \mathring{I}} |\Delta_{\Delta x, \Delta y} V_{ij}| \\ \max_{(i,j)\in \partial I} (-V_{ij}) + \frac{A^2}{2} \max_{(i,j)\in \mathring{I}} |\Delta_{\Delta x, \Delta y} V_{ij}| \end{cases}$$

$$\leq \max_{(i,j)\in \partial I} |V_{ij}| + \frac{A^2}{2} \max_{(i,j)\in \mathring{I}} |\Delta_{\Delta x \Delta y} V_{ij}|.$$

∎

Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι καλά ορισμένη.

<u>Πρόταση</u>. Ο πίνακας $U = \{U_{ij} : (i,j) \in I\} \in \mathbb{R}^{J_1 \times J_2}$

$$-\Delta_{\Delta x, \Delta y} U_{ij} = f(x_i, y_j) \quad \forall (i,j) \in \mathring{I} \qquad (1)$$

$$U_{ij} = g(x_i, y_j) \quad \forall (i,j) \in \partial I \qquad (2)$$

είναι καλά ορισμένος

<u>Απόδειξη:</u> Πρώτα θα αποδείξουμε την μοναδικότητα της $U$ η οποία ικανοποιεί τα (1) και (2). Έστω ότι $U = \{U_{ij} : (i,j) \in I\}$, και $\tilde{U} = \{\tilde{U}_{ij} : (i,j) \in I\}$ πίνακες που ικανοποιούν τα (1) και (2). Τότε ορίζουμε $W = U - \tilde{U}$, και εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$-\Delta_{\Delta x, \Delta y} W_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in \mathring{I}$$
$$W_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in \partial I$$

Τότε η Πρόταση Β μας δίνει:

$$\max_{(i,j) \in I} |W_{ij}| \leq \max_{(i,j) \in \partial I} |W_{ij}| + \frac{A^2}{2} \max_{(i,j) \in \mathring{I}} |\Delta_{\Delta x, \Delta y} W_{ij}|$$

$$\Rightarrow \max_{(i,j) \in I} |W_{ij}| \leq 0$$

. Άρα: $W = 0$, και επομένως $U = \tilde{U}$.

Μπορούμε να ορίσουμε τελεστή:

$$\overbrace{\overline{U}=\{\overline{U}_{ij}:(i,j)\in I\}}^{X} \xrightarrow{T} \overbrace{\overline{W}=\{\overline{W}_{ij}:(i,j)\in I\}}^{Y}$$

με:
$$\overline{W}_{ij} = -\Delta_{\Delta x\Delta y}\overline{U}_{ij} \quad \forall (i,j)\in \mathring{I}$$
$$\overline{W}_{ij} = \overline{U}_{ij} \quad \forall (i,j)\in \partial I.$$

Ο $T$ είναι γραμμικός και ο $X$ έχει πεπερασμένης διάστασης. Επειδή $T\overline{U}=0 \Rightarrow \overline{U}=0$, έχουμε $\ker(T)=\{0\}$ άρα ο $T$ αντιστρέφεται.

Θα παρουσιάσουμε την πρώτη εκτίμηση σφάλματος:

<u>Πρόταση.</u>
$$\max_{(i,j)\in I}|u(x_i,y_j)-\overline{U}_{ij}| \le \boxed{c}\,(\Delta x^2+\Delta y^2)$$
↳ ανεξάρτητη των $\Delta x, \Delta y$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $E_{ij}=u(x_i,y_j)-\overline{U}_{ij} \quad \forall (i,j)\in I$. Τότε:

$$-\Delta E_{ij} = G_{ij} := \frac{1}{\Delta x^2}R^A_{ij}+\frac{1}{\Delta y^2}R^B_{ij} \quad \forall (i,j)\in \mathring{I}$$
$$E_{ij}=0 \quad \forall (i,j)\in\partial I.$$

Η Πρόταση Β δίνει: $\max_{(i,j)\in I}|E_{ij}| \le \max_{(i,j)\in\partial I}|E_{ij}| + \frac{A^2}{2}\max_{(i,j)\in\mathring{I}}|G_{ij}|$

$$\leq \max_{(i,j)\in\Omega} |\tau'_{i,j}|$$

$$\leq \frac{1}{3}\left[\max_{D} |\partial_x^4 u|\, \Delta x^2 + \max_{D} |\partial_y^4 u|\, \Delta y^2\right].$$