Αριθμητική Λύση ΜΔΕ

8^{η} εξ αποστάσεως διάλεξη
Τρίτη 5/5/2020.

(5μμ − 7μμ)

(zoom)
meeting.

Εχουμε το πρόβλημα:

$$-\Delta u = f \quad \text{στο } D$$

$$u|_{\partial D} = g \quad \text{στο } \partial D$$

$D = [0,A] \times [0,B]$, $\mathring{D} = (0,A) \times (0,B)$

$\partial D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x \in \{0,A\} \text{ και } y \in [0,B] \\ \text{ή} \\ x \in [0,A] \text{ και } y \in \{0,B\} \end{array} \right\}$

Εστω: $J_1, J_2 \in \mathbb{N}$ με: $J_1, J_2 \geq 2$, $\Delta x = \frac{A}{J_1}$, $\Delta y = \frac{B}{J_2}$, $x_j = A + j\Delta x$ για $j = 0, \dots, J_1$, $y_k = B + k\Delta y$ για $k = 0, \dots, J_2$.

$I = \left\{ (i,k) : \begin{array}{l} 0 \leq i \leq J_1 \\ 0 \leq k \leq J_2 \end{array} \right\}$, $\partial I = \{ (i,k) : (i \in \{0, J_1\} \text{ και } k \in \{0, \dots, J_2\}) \text{ ή } (i \in \{0, \dots, J_1\} \text{ και } k \in \{0, J_2\}) \}$

$\mathring{I} = \left\{ (i,k) : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq J_1 - 1 \\ 1 \leq k \leq J_2 - 1 \end{array} \right\}$

<u>Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών</u>: Βρες: $U = (U_{ij})_{(i,j) \in I}$ τ.ω

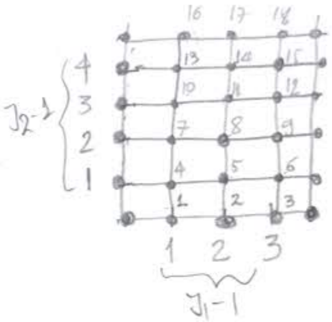
$$-\Delta_{\Delta x, \Delta y} U_{ij} = f(x_i, y_j) \quad \forall (i,j) \in \mathring{I}$$

$$U_{ij} = g(x_i, y_j) \quad \forall (i,j) \in \partial I.$$

Δείξαμε ότι η μέθοδος είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει με τάξη 2 ως προς $\Delta x, \Delta y$.

Πίνακας γραμμικού συστήματος:

Για να περιγράψουμε τον πίνακα του γραμμικού συστήματος, πρέπει να εισάγουμε μια διάταξη των $(u_{ij})_{(i,j)\in \mathring{I}}$. Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ένας απλός τρόπος είναι ο κανόνας "διατάσουμε πρώτα ως προς j και μετά διατάσουμε ως προς i"



$J_1 = 4$

$J_2 = 5$

δηλ. $\boxed{\text{το } u_{i,j} \text{ προηγείται του } u_{i,j+1}}$ και το $\boxed{u_{i,j} \text{ προηγείται του } u_{i+1,j}}$

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, για $(i,j)\in \mathring{I}$, δίνει:

$$\frac{1}{\Delta x^2} u_{i-1,j} - \frac{2}{\Delta x^2} u_{ij} + \frac{1}{\Delta x^2} u_{i+1,j} + \frac{1}{\Delta y^2} u_{i,j-1} - \frac{2}{\Delta y^2} u_{i,j} + \frac{1}{\Delta y^2} u_{i,j+1} = -f(x_i,y_j)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta x^2} u_{i-1,j} + \left[-\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2}\right] u_{ij} + \frac{1}{\Delta x^2} u_{i+1,j} + \frac{1}{\Delta y^2} u_{i,j-1} + \frac{1}{\Delta y^2} u_{i,j+1} = -f(x_i,y_j)$$

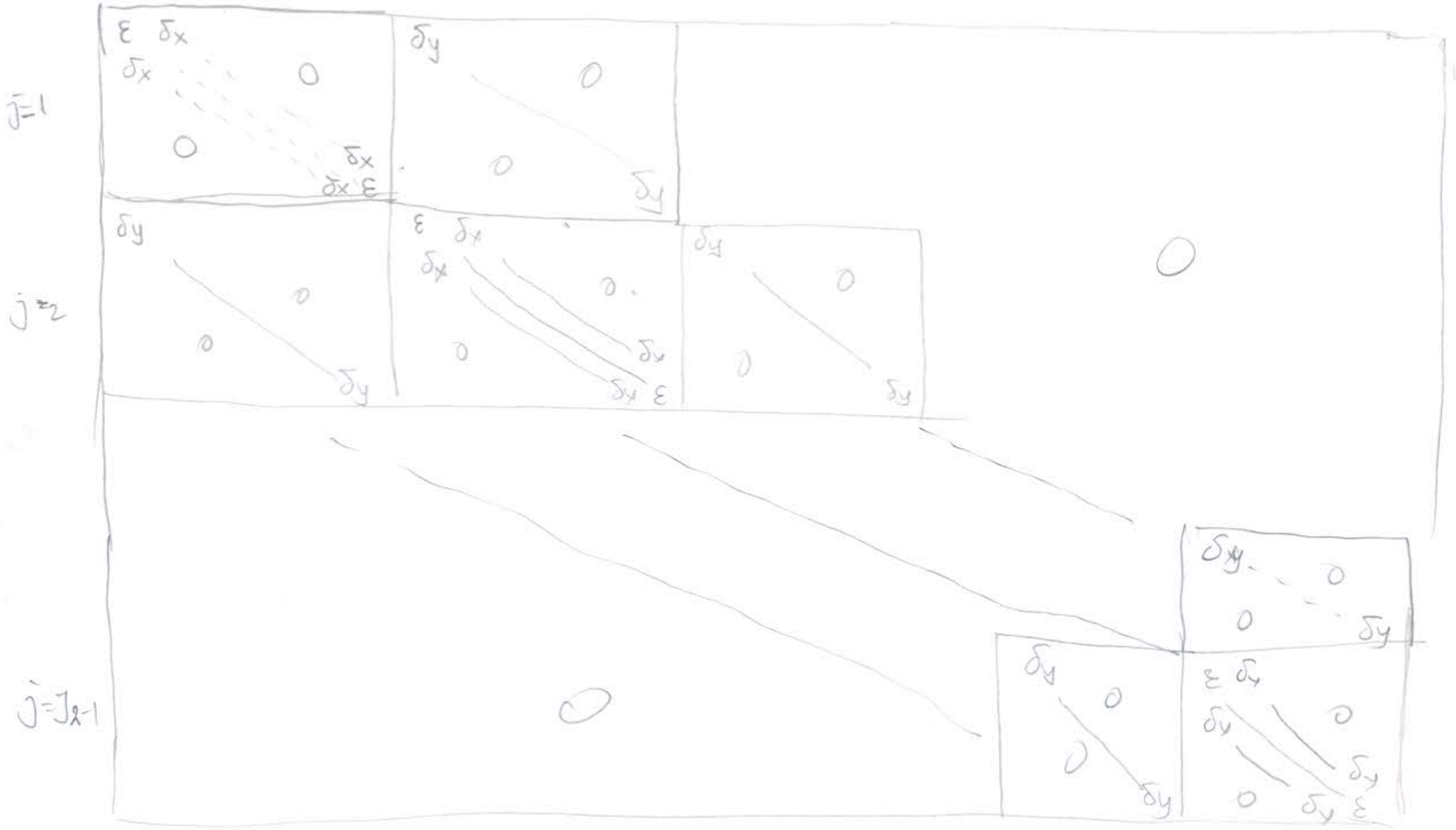
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta y^2} u_{i,j-1} + \frac{1}{\Delta x^2} u_{i-1,j} + \left[-\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2}\right] u_{ij} + \frac{1}{\Delta x^2} u_{i+1,j} + \frac{1}{\Delta y^2} u_{i,j+1} = -f(x_i,y_j)$$

Πρώτα διατρέχουμε: $j=1,\dots,J_2-1$, και μετά το $i=1,\dots,J_1-1$.

$$\varepsilon = -\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2}$$

$$\delta_x = \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$\delta_y = \frac{1}{\Delta y^2}$$



Όπως φαίνεται ο πίνακας είναι block τριδιαγώνιος με διαγώνια τα άνω και κάτω block και τριδιαγώνια τα διαγώνια block. Η διάσταση του πίνακα είναι J×J με $J=(J_2-1)\times(J_1-1)$, και έχει περίπου 5J μη μηδενικά στοιχεία. Επίσης ο πίνακας είναι συμμετρικός.

Οι άμεσες μέθοδοι δεν είναι κατάλληλες διότι απαιτούν πρόσθετη μνήμη.
Η εναλλακτική λύση είναι η χρήση επαναληπτικών μεθόδων όπως η Gauss-Seidel και η μέθοδος συζυγών κλίσεων. Γι' αυτό χρειαζόμαστε να εξασφαλίσουμε σύγκλιση π.χ. με το να δείξουμε ότι ο πίνακας είναι θ.ο.

Έχουμε ότι:

$$+\frac{\bar U_{i-1,j}-2\bar U_{ij}+\bar U_{i+1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\bar U_{i,j-1}-2\bar U_{ij}+\bar U_{i,j+1}}{\Delta y^2}=-\underbrace{f(x_i,y_j)}_{f_{ij}} \quad \forall (i,j)\in \mathring{I}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε με $\bar U_{ij}$ και αθροίσουμε ως i από 1 έως J_1-1 και ως προς j από 1 έως J_2-1, έπεται:

$$\frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J_1-1}\sum_{j=1}^{J_2-1}\left(\bar U_{i-1,j}-2\bar U_{ij}+\bar U_{i+1,j}\right)\bar U_{ij}+\frac{1}{\Delta y^2}\sum_{i=1}^{J_1-1}\sum_{j=1}^{J_2-1}\left(\bar U_{i,j-1}-2\bar U_{ij}+\bar U_{i,j+1}\right)\bar U_{ij}=-\sum_{i=1}^{J_1-1}\sum_{j=1}^{J_2-1}f_{ij}\,\bar U_{i,j}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\bar U_{ij}=0$ όταν $(i,j)\in\partial I$ Τότε:

που συμβαίνει όταν $g\equiv 0$

(8.5

$$- \ldots + \sum_{j=1}^{J_2-1} \sum_{i=0}^{J_1-1} \left| \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} \right|^2 + \sum_{i=1}^{J_1-1} \sum_{j=0}^{J_2-1} \left| \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta y} \right|^2 = + \sum_{i=1}^{J_1-1} \sum_{j=1}^{J_2-1} f_{ij} U_{ij}.$$

$- \Delta_{\Delta x \Delta y} U_{ij} = f_{ij}$

Όταν G είναι ο πίνακας του γραμμικού συστήματος και $x = (x_{ij})_{(i,j) \in \mathring{I}}$

τότε: $$x^T G x = \sum_{j=1}^{J_2-1} \sum_{i=0}^{J_1-1} \left| \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\Delta x} \right|^2 + \sum_{i=1}^{J_1-1} \sum_{j=0}^{J_2-1} \left| \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{\Delta y} \right|^2 \geq 0$$ ισχύουν

επεκτείνω το x θέτοντας: $x_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in \bar{I}$.

Όταν $x^T G x = 0 \Rightarrow x_{i+1,j} - x_{ij} = 0$, $j = 1, \ldots, J_2-1$, $i = 0, \ldots, J_1-1$

$\Rightarrow x_{ij} = x_{0,j}$ $i = 1, \ldots, J_1$, $j = 1, \ldots, J_2-1$

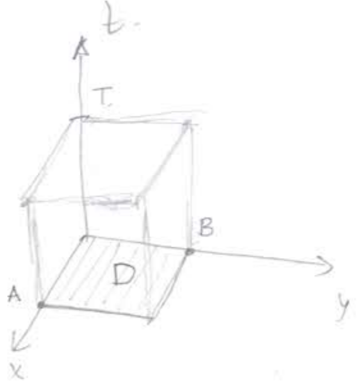
$\Rightarrow x = 0$ Έτσι ο πίνακας είναι θ.ο.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΧΩΡΙΟ

$$u_t = \Delta u + f(u) \qquad \forall t \in (0,T] \quad \forall (x,y) \in \mathring{D}$$

$$u(t,\cdot)\big|_{\partial D} = 0 \qquad \forall t \in (0,T]$$

$$u(0,x) = v(x) \qquad \forall x \in D$$



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,A] \text{ και } y \in [0,B]\}$

$= [0,A] \times [0,B]$

$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in (\{0,A\} \times [0,B]) \cup ([0,A] \times \{0,B\})\}$

$\mathring{D} = (0,A) \times (0,B)$

υποθέτουμε ότι:

α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με: $\sup_{\mathbb{R}} |f'| < +\infty$

β) $v|_{\partial D} = 0$

γ) u αρκετά ομαλή στο D

Μέθοδος Π. Euler / πεπερασμένων διαφορών

$J_1, J_2 \in \mathbb{N}$, ≥ 2 $\qquad \Delta x = \dfrac{A}{J_1}$, $\Delta y = \dfrac{B}{J_2}$

$x_j = A + j\,\Delta x$ για $j = 0, \dots, J_1$

$y_k = B + k\,\Delta y$ για $k = 0, \dots, J_2$

$I = \{(j,k) : 0 \leq j \leq J_1,\ 0 \leq k \leq J_2\}$, $\mathring{I} = \{(j,k) : 0 < j < J_1,\ 0 < k < J_2\}$

$$\partial D = \left\{ (j,k) : \begin{array}{l} j \in \{0, J_1\} \text{ και } 0 \leq k \leq J_2 \\ \text{ή} \\ 0 \leq j \leq J_1 \text{ και } k \in \{0, J_2\} \end{array} \right\}$$

$N \in \mathbb{N}$, $\Delta t = T/N$, $t_n = n\,\Delta t$ για $n = 0, \dots, N$.

Έστω: $X = \{ (W_{j,k})_{(j,k)\in I} : W_{j,k}=0 \ \forall (j,k)\in \partial I \}$, δηλ. το σύνολο πινάκων με δείκτες στο I και με τιμή 0 όταν οι δείκτες ανήκουν στο ∂I. Η μέθοδος πεπλεγμένη Euler/πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζει, για $n=0,\dots,N$, την $u(t^n,\cdot)$ στα σημεία του πλέγματος $\{(x_j,y_k) : (j,k)\in I\}$ ως εξής:

Βήμα 1: Ορίζουμε: $U^0 \in X$ με:

$$U^0_{ij} = v(x_i,y_j) \quad \forall (i,j)\in \mathring{I}.$$

Βήμα 2: Για $n=0,\dots,N-1$, υπολογίζουμε: $U^{n+1}\in X$ τ.ω.

$$\frac{U^{n+1}_{ij}-U^{n}_{ij}}{\Delta t} = \Delta_{\Delta x,\Delta y} U^{n+1}_{ij} + f(U^{n}_{ij}) \quad \forall (i,j)\in \mathring{I}$$

όπου: $\Delta_{\Delta x \Delta y} W_{ij} = \dfrac{W_{i+1,j} - 2W_{ij} + W_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \dfrac{W_{i,j+1} - 2W_{ij} + W_{i,j-1}}{\Delta y^2}$, $\forall W \in X$, $\forall (i,j)\in \mathring{I}$

Σημ. Η μέθοδος είναι καλά ορισμένη και προκύπτει γραμμικό σύστημα ως προς την U^{n+1} με πίνακα της μορφής $I+\Delta t\, G$ όπου G ο πίνακας του $-\Delta_{\Delta x \Delta y} W_{ij} = f_{ij}$ $\forall (i,j)\in \mathring{I}$. Επειδή ο G είναι θ.ο. είναι και $I+\Delta t G$ θ.ο.

Έστω: $u^n \in X$ με: $u^n_{ij} = U(t_n, x_i, y_j)$ $\forall (i,j) \in \mathring{I}$, $n = 0, \dots, N$.

Επιπλέον ορίζουμε: $E^n_{ij} = u^n_{ij} - U^n_{ij}$ $\forall (i,j) \in I$.

σφάλμα συνέπειας

Άρα:

$$E^{n+1}_{ij} - E^n_{ij} = \Delta t \, \Delta_{\Delta x \Delta y} E^{n+1}_{ij} + \Delta t \left(f(u^n_{ij}) - f(U^n_{ij}) \right) + R^n_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad E^{n+1}_{ij} = E^n_{ij} + \Delta t \left\{ \frac{E^{n+1}_{i+1,j} - 2E^{n+1}_{ij} + E^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{E^{n+1}_{i,j+1} - 2E^{n+1}_{ij} + E^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right\}$$

$$+ \Delta t \, f'(\theta_{ij} u^n_{ij} + (1-\theta) U^n_{ij}) \, E^n_{ij} + \Delta t \, R^n_{ij}$$

$\theta \in (0,1)$

Έτσι: $|E^{n+1}_{i_0, j_0}| = \max_{(i,j) \in I} |E^{n+1}_{ij}|$ με: $(i_0, j_0) \in \mathring{I}$. Τότε

$$\left(1 + \frac{\Delta t 2}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta y^2}\right) E^{n+1}_{i_0 j_0} = E^n_{i_0 j_0} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(E^{n+1}_{i_0+1, j_0} + E^{n+1}_{i_0-1, j_0}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2}\left(E^{n+1}_{i_0, j_0+1} + E^{n+1}_{i_0, j_0-1}\right) + \Delta t \, f'(\cdot) \, E^n_{i_0 j_0} +$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta y^2}\right) \max_{i,j} |E^{n+1}_{ij}| \le (1 + C_f \Delta t) \max_{i,j} |E^n_{ij}| + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \max_{i,j} |E^{n+1}_{ij}| + \frac{2\Delta t}{\Delta y^2} \max_{i,j} |E^{n+1}_{ij}|$$

$$+ \Delta t \max_{ij} |R^n_{ij}| \, .$$

$$\Longrightarrow \max_{i,j} |E^{n+1}_{ij}| \leq (1 + C_1 \Delta t) \max_{i,j} |E^{n}_{ij}| + \Delta t \max_{i,j} |R^{n}_{ij}|$$

Διακριτό Gronwall

$$\Longrightarrow \max_{0 \leq n \leq N} \left(\max_{i,j} |E^{n+1}_{ij}| \right) \leq e^{C_1 T} \Big\{ \underbrace{\max_{i,j} |E^0|}_{=0} + \underbrace{\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \max |R^n_{ij}|}_{O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2)} \Big\} = O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2)$$

CRANK-NICOLSON $(f \equiv 0)$

<u>ΒΗΜΑ 1º</u> $U^0 \in X$

$$U^0_{ij} = v(x_i, y_j) \quad (i,j) \in \mathring{I}$$

<u>ΒΗΜΑ 2º:</u> Για $n=0,\dots,N-1$, ψάχνουμε $U^{n+1} \in X$ τ.ω.

$$\frac{U^{n+1}_{ij} - U^n_{ij}}{\Delta t} = \Delta_{\Delta x, \Delta y}\left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2}\right)\Big|_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathring{I}$$

(β.11)

ADI παραλλαγή

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^{n}}{\Delta t/2} = \frac{u_{i-1,j}^{n+1/2} - 2u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2}$$

$$\forall (i,j) \in \mathring{I}$$

και

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}}{\Delta t/2} = \frac{u_{i-1,j}^{n+1/2} - 2u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}$$

$$\forall (i,j) \in \mathring{I}$$

[Εδώ το κέρδος είναι το "σπάσιμο" του αρχικού $J \times J$ πίνακα σε πολλά μικρότερα 1D συστήματα.